

Versión del estudiante

Eureka Math

Álgebra I

Módulo 5

Se les extiende un agradecimiento especial al Centro Gordon A. Cain y al Departamento de Matemáticas de la Universidad Estatal de Luisiana por su colaboración en el desarrollo de *Eureka Math*.

Para obtener un paquete gratis
de recursos de *Eureka Math*
para maestros, los Consejos
para padres y otros recursos,
por favor, visite
www.Eureka.tools.

Great Minds PBC es el creador de *Eureka Math*[®],
Wit & Wisdom[®], *Alexandria Plan*[™] y *PhD Science*[™].

Publicado por Great Minds PBC. greatminds.org

Copyright © 2020 Great Minds PBC. Todos los derechos reservados. Ninguna parte de esta obra puede reproducirse ni utilizarse de ninguna manera ni a través de ningún medio, ya sea gráfico, electrónico o mecánico incluido el fotocopiado, el almacenaje y los sistemas de recuperación de la información sin la autorización por escrito del titular de los derechos de autor.

ISBN 978-1-68386-235-2

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

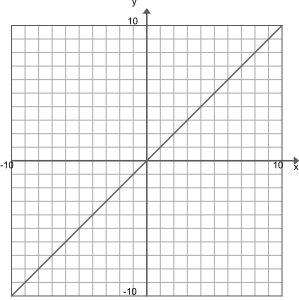
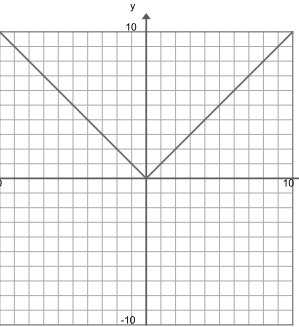
Impreso en los EE. UU.

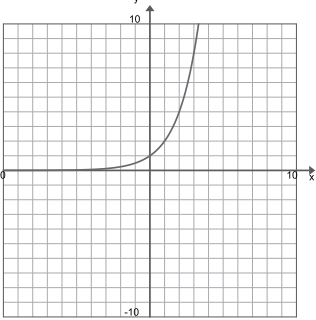
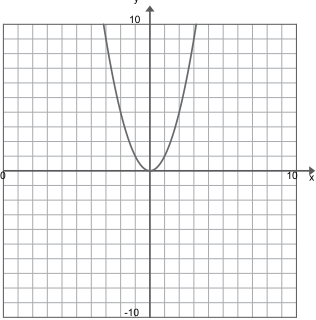
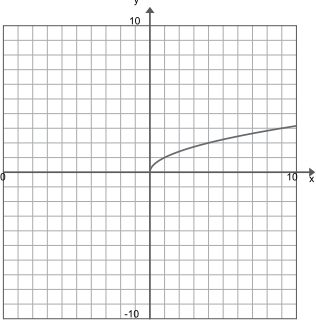
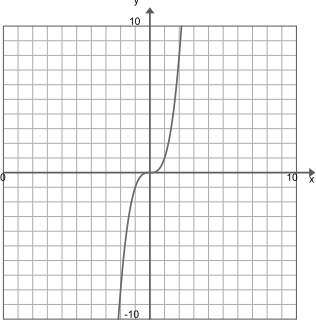
Lección 1: Analizar una gráfica

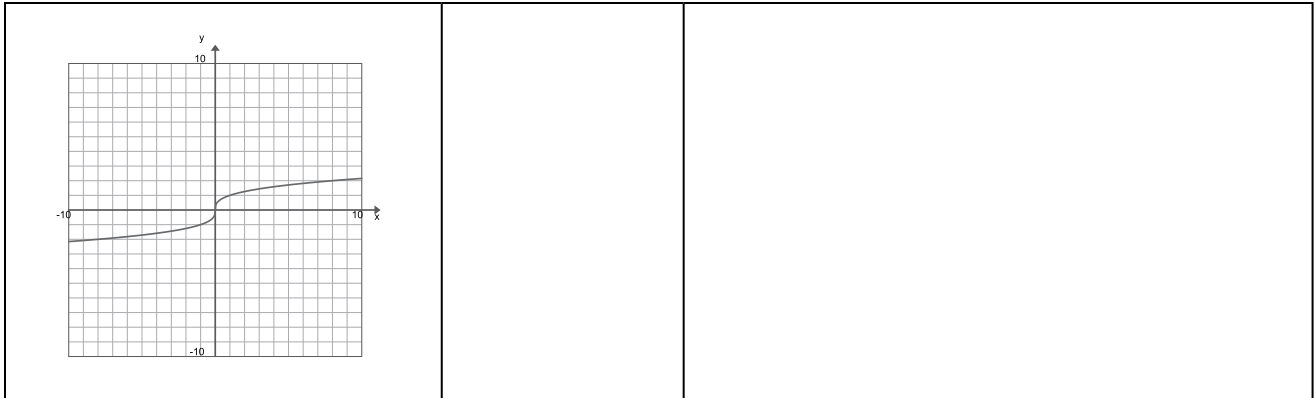
Trabajo en clase

Ejercicio inicial

En las siguientes gráficas se dan ejemplos de cada función madre que estudiamos este año. Para cada gráfica, identifica el tipo de función y la forma general de la ecuación de la función madre; luego brinda observaciones generales sobre las características principales de la gráfica que te ayudaron a identificar el tipo de función. (Algunos tipos de función son lineal, cuadrática, exponencial, de raíz cuadrada, de raíz cúbica, cúbica, de valor absoluto y otras funciones a trozos. Las características principales pueden incluir la forma general de la gráfica, los interceptos de x y de y , la simetría, un vértice, el comportamiento final, los valores o las restricciones del dominio y del rango, y las razones de cambio promedio en un intervalo).

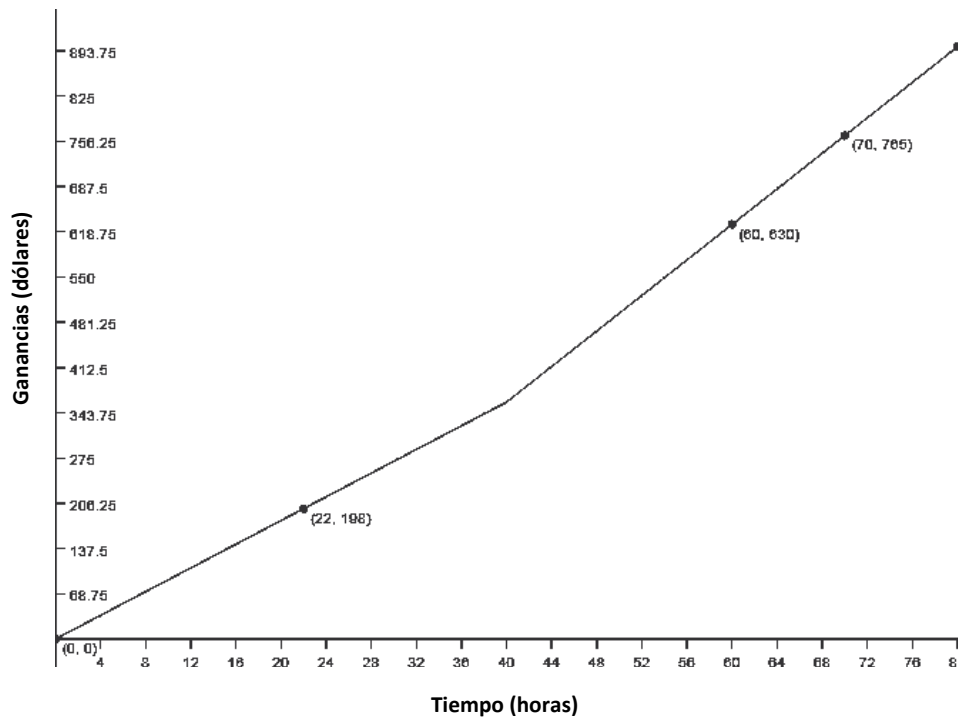
TABLA DE RESUMEN DE LAS FUNCIONES		
Gráfica	Tipo de función y función madre	Pistas sobre las funciones: características principales, observaciones
		
		



Ejemplo 1

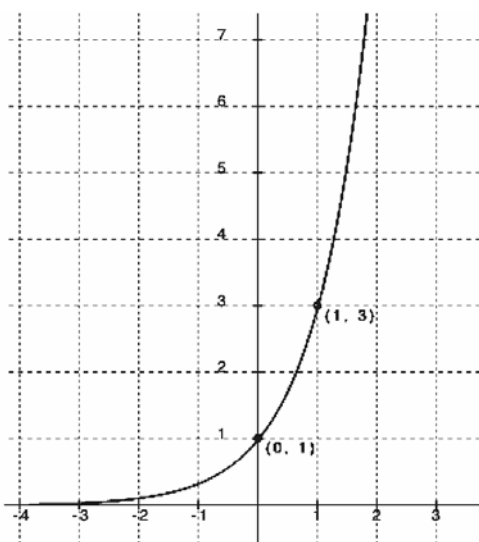
Eduardo tiene un trabajo de verano en el que le pagan una determinada tarifa por hora en las primeras 40 horas cada semana y una tarifa y media por cualquier hora extra. En la siguiente gráfica se muestra cuánto dinero gana Eduardo como una función de las horas que trabaja en una semana.



Ejercicios

1. Escribe la función en forma analítica (simbólica) de la gráfica del Ejemplo 1.
 - a. ¿Cuál es la ecuación del primer trozo de la gráfica?
 - b. ¿Cuál es la ecuación del segundo trozo de la gráfica?
 - c. ¿Cuáles son las restricciones del dominio en el contexto?
 - d. Explica el dominio en el contexto del problema.

Para cada una de las siguientes gráficas, utiliza las preguntas y los pares ordenados identificados como ayuda para formular una ecuación que la represente.

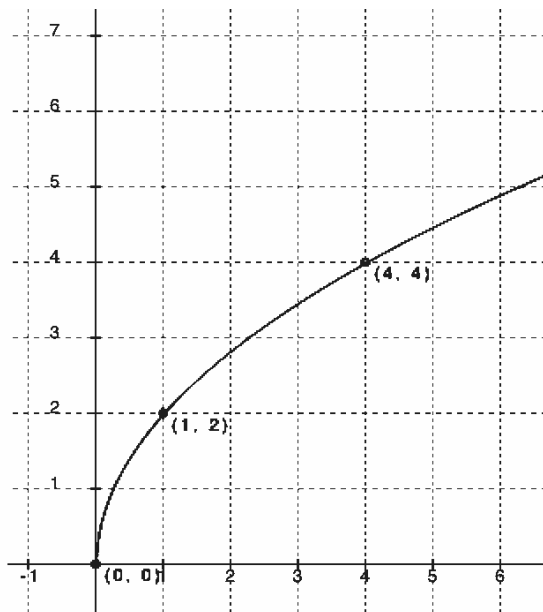


2. Tipo de función:

Función madre:

Transformaciones:

Ecuación:

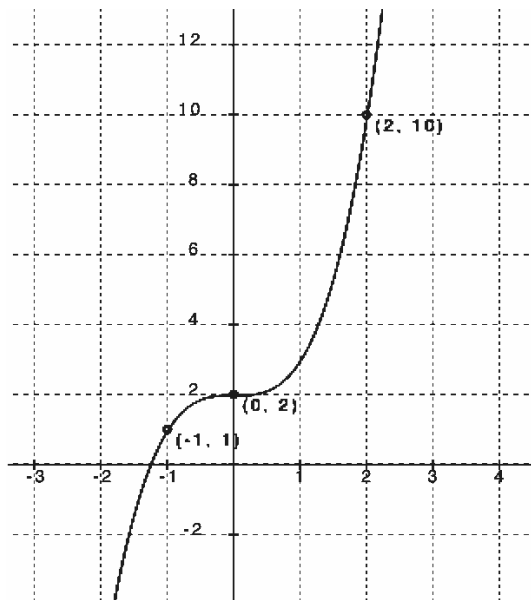


3. Tipo de función:

Función madre:

Transformaciones:

Ecuación:

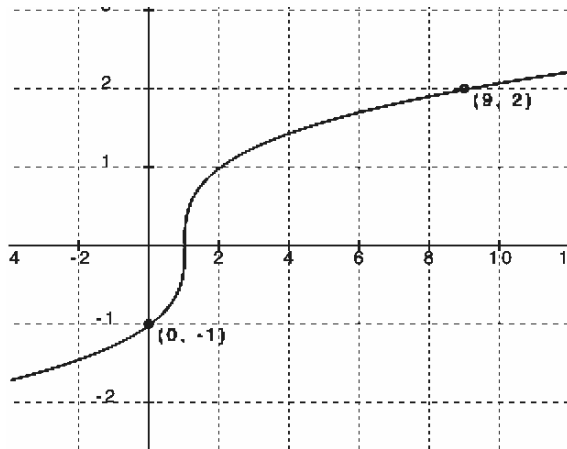


4. Tipo de función:

Función madre:

Transformaciones:

Ecuación:

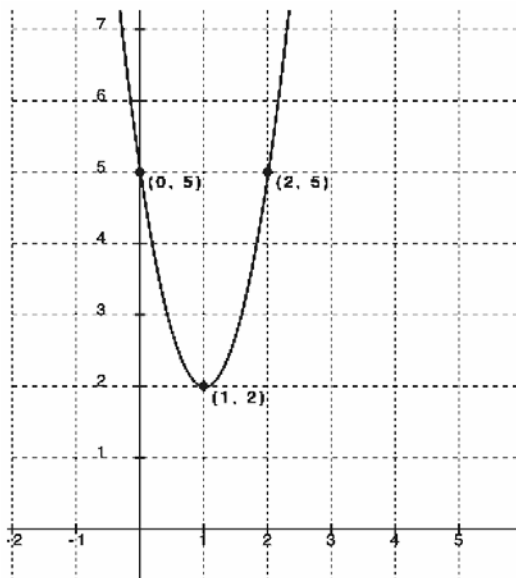


5. Tipo de función:

Función madre:

Transformaciones:

Ecuación:



6. Tipo de función:

Función madre:

Transformaciones:

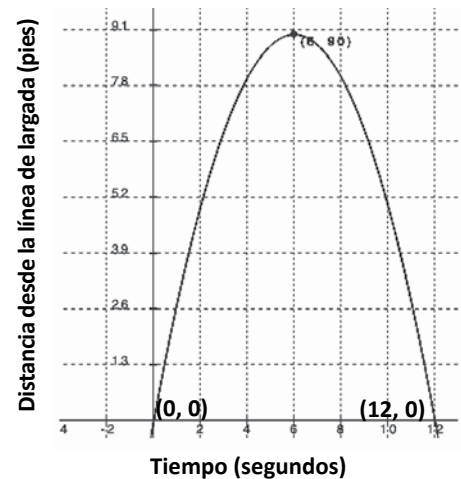
Ecuación:

Resumen de la lección

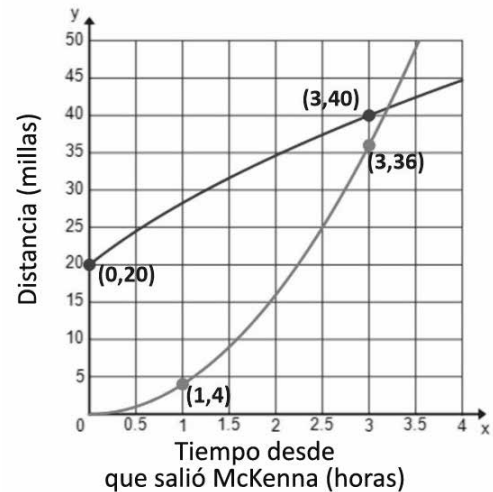
- Cuando se da un contexto representado gráficamente, primero debes:
 - identificar las variables del problema (dependiente e independiente) e
 - identificar la relación entre las variables que se describen en la gráfica o situación.
- Para crear una expresión que represente una gráfica, debes reconocer el tipo de función que representa la gráfica, observar las características principales de la gráfica (entre ellas las restricciones del dominio), identificar las cantidades y unidades incluidas, y crear una ecuación en la que se analice la función representada gráficamente.
- Identificar una función madre y pensar en la transformación de la función madre a la gráfica de la función puede ayudarte a crear la representación analítica de la función.

Grupo de problemas

1. Durante las pruebas para el equipo de atletismo, Bob hace carreras cortas de 90 pies al correr desde una línea de largada hasta la pared opuesta del gimnasio y de vuelta hasta la línea de largada. En el tiempo $t = 0$, está en la línea de largada y listo para acelerar hacia la pared opuesta. A medida que t se acerca a los 6 segundos, debe bajar la velocidad, detenerse solo un instante para tocar la pared, girar y correr de vuelta hasta la línea de largada. En la siguiente gráfica se representa su distancia, en pies, desde la línea de largada con respecto al número de segundos que han pasado para una repetición.
 - a. ¿Cuáles son las características principales de esta gráfica?
 - b. ¿Qué unidades se incluyen?
 - c. ¿Cuál es la función madre de esta gráfica?
 - d. ¿Se realizó alguna transformación a la función madre para obtener esta gráfica?
 - e. ¿Con qué representación analítica general esperarías que se represente este contexto?
 - f. ¿Qué es lo que ya sabes sobre los parámetros de la ecuación?
 - g. Utiliza los pares ordenados que conoces para reemplazar los parámetros en la forma general de tu ecuación con constantes de modo que la ecuación represente este contexto. Utiliza la gráfica para comprobar tu respuesta.



2. Spencer y McKenna hacen un paseo largo en bicicleta. Spencer sale una hora antes que McKenna. En la siguiente gráfica se muestra la distancia de cada ciclista en millas desde su casa como una función del tiempo desde que McKenna salió en su bicicleta para alcanzar a Spencer. (Nota: las partes (e), (f) y (g) son problemas avanzados).
- ¿Qué función representa la distancia de Spencer? ¿Qué función representa la distancia de McKenna? Explica tu razonamiento.
 - Calcula aproximadamente cuándo McKenna alcanza a Spencer. ¿Qué distancia han recorrido en ese punto en el tiempo?
 - Un ciclista acelera a medida que pasa el tiempo y el otro baja la velocidad. ¿Cuál es cuál y cómo lo sabes a partir de las gráficas?
 - Según las gráficas, ¿qué tipo de función representaría mejor la distancia de cada ciclista?
 - Crea una función para representar la distancia de cada ciclista como una función del tiempo desde que McKenna comenzó a andar en bicicleta. Utiliza los puntos de datos identificados en la gráfica para crear un modelo preciso para la distancia de cada ciclista.
 - ¿Qué significan los interceptos de x y de y de cada ciclista en el contexto de este problema?
 - Calcula aproximadamente qué ciclista se desplaza más rápido 30 minutos después de que McKenna comenzó a andar. Muestra el proceso para apoyar tu respuesta.



Lección 2: Analizar un conjunto de datos

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

Cuando se utilizan tablas para representar funciones, normalmente tenemos solo algunos valores muestrales de la función y, por lo tanto, tenemos que investigar para descubrir cuál podría ser la función. Observa estas tres tablas:

x	$f(x)$
0	6
1	12
2	18
3	24
4	30
5	36

x	$g(x)$
0	0
1	14
2	24
3	30
4	32
5	30

x	$h(x)$
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243

Ejemplo 1

Noam y Athena intercambiaron opiniones sobre si llevaría más tiempo ir desde la ciudad de Nueva York hasta Boston y de vuelta a la ciudad de Nueva York en carro o en tren. Para resolver sus diferencias, hicieron viajes de ida y vuelta sin paradas desde la ciudad de Nueva York hasta Boston por separado. En el viaje, al final de cada hora, ambos registraron el número de millas que habían recorrido desde su punto de partida en la ciudad de Nueva York. En las siguientes tablas se muestran sus tiempos de viaje, en horas, y las distancias desde sus puntos de partida, en millas. En la primera tabla se muestra el tiempo de viaje y la distancia desde el punto de partida de Noam, y en la segunda tabla se representan el tiempo y la distancia de Athena. Utiliza ambos conjuntos de datos para justificar tus respuestas a las siguientes preguntas.



Tiempo en horas	Distancia de Noam
0	0
1	55
2	110
3	165
4	220
5	165
6	110
7	55
8	0

Tiempo en horas	Distancia de Athena
0	0
1	81
2	144
3	189
4	216
5	225
6	216
7	189
8	144
9	81
10	0

- a. ¿Quién piensas que conduce el carro y quién viaja en tren? Explica tu respuesta en el contexto del problema.
- b. Según los datos, ¿a qué distancia se encuentran Boston y la ciudad de Nueva York? Explica tu respuesta de forma matemática.

- c. ¿Cuánto tardó cada uno en hacer el viaje de ida y vuelta?
- d. Según los datos que recopilaron, ¿qué método de viaje fue más rápido?
- e. ¿Cuál fue la razón de cambio promedio de Athena para el intervalo de 3 a 4 horas? ¿Cómo podrías explicar eso en el contexto del problema?
- f. Noam cree que se puede utilizar una función cuadrática como un modelo para ambos conjuntos de datos. ¿Estás de acuerdo? Utiliza y describe las características principales de las funciones representadas por los conjuntos de datos para apoyar tu respuesta.

Ejercicios

1. Explica por qué cada función se puede utilizar o no para representar el conjunto de datos dado.

a. $f(x) = 3x + 5$

x	$f(x)$
0	5
1	8
2	9
3	8
4	5
5	0
6	-7

b. $f(x) = -(x - 2)^2 + 9$

c. $f(x) = -x^2 + 4x - 5$

d. $f(x) = 3^x + 4$

e. $f(x) = (x - 2)^2 + 9$

f. $f(x) = -(x + 1)(x - 5)$

2. Empareja cada una de las siguientes tablas con la función y el contexto, y explica cómo tomaste la decisión.

A		B		C		D		E	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
1	9	1	12	0	160	1	2	2	8
2	18	2	24	1	174	2	4	3	9
3	27	3	36	2	156	3	8	4	8
4	18	4	48	3	106	4	16	5	5
5	9	5	60	4	24	5	32	6	0

Ecuación _____

Ecuación _____

Ecuación _____

Ecuación _____

Ecuación _____

Contexto _____

Contexto _____

Contexto _____

Contexto _____

Contexto _____

Ecuaciones:

$$f(x) = 12x$$

$$h(x) = -9|x - 3| + 27$$

$$g(x) = -(x)(x - 6)$$

$$p(x) = 2^x$$

$$q(x) = -16x^2 + 30x + 160$$

Contextos:

1. La población de bacterias se duplicó cada mes, y se registró la población total en función del tiempo.
2. Se lanzó una pelota hacia arriba desde el techo de un edificio, y se registró la distancia vertical de la pelota desde el suelo en función del tiempo.
3. Se registró la altura del salto vertical de un determinado animal en intervalos de tiempo regulares de un segundo; el animal regresó al nivel del suelo después de seis segundos.
4. Melvin ahorra la misma cantidad de dinero todos los meses. Se registró la cantidad total que ahorró después de cada mes.
5. Chris corrió a una velocidad constante en una trayectoria en línea recta y luego regresó a la misma velocidad. Se registró su distancia desde el punto de partida en intervalos de tiempo regulares.

Resumen de la lección

Los siguientes métodos se pueden utilizar para determinar si el modelo apropiado para un conjunto de datos dado es una función lineal, cuadrática o exponencial:

- Si la primera diferencia es constante, entonces el conjunto de datos podría representarse mediante una función lineal.
- Si la segunda diferencia es constante, entonces el conjunto de datos podría representarse mediante una función cuadrática.
- Si los valores de y subsiguientes se multiplican por una constante, entonces el conjunto de datos podría representarse mediante una función exponencial.

Grupo de problemas

- 1.
- a. Determina el tipo de función que se podría utilizar para representar el conjunto de datos de la derecha y explica por qué.
 - b. Completa el conjunto de datos utilizando el patrón especial de la función que describiste anteriormente.
 - c. Si existe, halla el valor mínimo o máximo del modelo de la función. Si no hay mínimo o máximo, explica por qué.

x	y
0	
1	10
2	0
3	-6
4	-8
5	
6	

- 2.
- a. Determina el tipo de función que se podría utilizar para representar el conjunto de datos y explica por qué.
 - b. Completa el conjunto de datos utilizando el patrón especial de la función que describiste anteriormente.
 - c. Si existe, halla el valor mínimo o máximo del modelo de la función. Si no hay mínimo o máximo, explica por qué.

x	y
-1	
0	
1	
2	16
3	64
4	256
5	1024

- 3.
- a. Determina el tipo de función que se podría utilizar para representar el conjunto de datos y explica por qué.
 - b. Completa el conjunto de datos utilizando el patrón especial de la función que describiste anteriormente.
 - c. Si existe, halla el valor mínimo o máximo del modelo de la función. Si no hay mínimo o máximo, explica por qué.

x	y
-1	
0	12
1	
2	24
3	
4	36
5	

4. Encierra en un círculo todos los tipos de funciones que se podrían utilizar para representar un contexto si el enunciado dado se aplica.

a. Cuando los valores de x están en intervalos regulares, la primera diferencia de los valores de y no es constante.

Función lineal	Función cuadrática	Función exponencial	Función de valor absoluto
----------------	--------------------	---------------------	---------------------------

b. Cuando los valores de x están en intervalos regulares, la segunda diferencia de los valores de y no es constante.

Función lineal	Función cuadrática	Función exponencial	Función de valor absoluto
----------------	--------------------	---------------------	---------------------------

c. Cuando los valores de x están en intervalos regulares, el cociente de dos valores de y consecutivos cualesquiera es una constante que no es igual a 0 ni a 1.

Función lineal	Función cuadrática	Función exponencial	Función de valor absoluto
----------------	--------------------	---------------------	---------------------------

d. Puede haber hasta dos valores diferentes de x para $y = 0$.

Función lineal	Función cuadrática	Función exponencial	Función de valor absoluto
----------------	--------------------	---------------------	---------------------------

Esta página queda en blanco intencionalmente.

Lección 3: Analizar una descripción verbal

Trabajo en clase

Lee los siguientes ejemplos de problemas y discute sobre una estrategia de resolución de problemas en parejas o con un grupo pequeño.

Ejemplo 1

Gregory planea comprar una consola de videojuegos. Tiene \$500 en su caja de ahorros y planea ahorrar \$20 por semana de su cantidad semanal hasta tener suficiente dinero para comprar la consola. Necesita hallar cuánto tiempo le llevará. ¿Qué tipo de función debería utilizar para representar este problema? Justifica tu respuesta de forma matemática.

Ejemplo 2

Una de las atracciones en una exhibición de carros es un carro que sube por una rampa y vuela sobre aproximadamente cinco carros colocados uno tras otro. La rampa mide 8 ft en su punto más alto, y hay una velocidad de subida de 88 ft/s antes de que el carro deje la cima de la rampa. ¿Qué tipo de función puede representar mejor la altura, h , en pies, del carro t segundos después de dejar el extremo de la rampa? Justifica tu respuesta de forma matemática.

Ejemplo 3

Margie recibió \$1,000 de su abuela para comenzar su fondo universitario. Abre una nueva caja de ahorros y descubre que su banco le ofrece una tasa de interés anual del 2%, computado mensualmente. ¿Qué tipo de función representaría mejor la cantidad de dinero en la cuenta de Margie? Justifica tu respuesta de forma matemática.

Ejercicios

1. Los trabajadores de la ciudad registraron el número de ardillas en un parque durante un periodo de tiempo. En el primer conteo, había 15 pares de ardillas macho y hembra (30 ardillas en total). Después de 6 meses, los trabajadores de la ciudad registraron un total de 60 ardillas y, después de un año, había 120.
 - a. ¿Qué tipo de función puede representar mejor la población de ardillas registrada durante un periodo de tiempo, suponiendo que la tasa de crecimiento es la misma y que no murió ninguna ardilla?

 - b. Escribe una función que represente la población de ardillas registrada durante un número x de años. Explica cómo determinaste tu función.

2. Una fotografía rectangular que mide 8 in por 10 in está rodeada por un marco con un ancho uniforme, x .
 - a. ¿Qué tipo de función puede representar mejor el área de la foto y el marco en términos de x (el ancho desconocido del marco)? Explica de forma matemática cómo lo sabes.

 - b. Escribe una ecuación en forma estándar que represente el área de la foto y el marco. Explica cómo obtuviste tu ecuación.

3. Se lanza al aire una pelota a una velocidad inicial de 50 ft/s desde 5 ft sobre el suelo.
- ¿Qué tipo de función representa la altura (h , en pies) de la pelota después de t segundos?
 - Explica qué sucede con la altura de la pelota a medida que la pelota se desplaza durante un periodo de tiempo (en t segundos).
 - ¿Qué función representa la altura, h (en pies), de la pelota durante un periodo de tiempo (en t segundos)?
4. Se sabe que una población de insectos se triplica en tamaño cada mes. Al comienzo de un proyecto de investigación científica, había 200 insectos.
- ¿Qué tipo de función representa la población de los insectos después de t años?
 - Escribe una función que represente el crecimiento de la población de los insectos después de t años.

Resumen de la lección

Los siguientes métodos se pueden utilizar para reconocer un tipo de función a partir de un problema verbal:

1. Si un problema requiere la suma o resta repetida de un valor constante, entonces se representa mediante una función lineal.
2. Si un problema trata sobre el movimiento en caída libre de un objeto o sobre un área, entonces se representa mediante una función cuadrática.
3. Si un problema trata sobre el crecimiento de una población o sobre el interés compuesto, entonces se representa mediante una función exponencial.

Grupo de problemas

1. Los pósters de espíritu escolar cuestan lo siguiente: dos pósters por \$5, cuatro pósters por \$9, seis pósters por \$13, ocho pósters por \$17, y así sucesivamente.
 - a. ¿Qué tipo de función representaría mejor el costo del número total de pósters que se compraron?
 - b. ¿Qué función representa el costo del número total de pósters que se compraron? ¿Cómo lo sabes? Justifica tu razonamiento.
 - c. Si tienes \$40 para gastar, escribe una desigualdad para hallar el número máximo de pósters que podrías comprar.
2. El gimnasio deportivo NYC Sports Gym tenía 425 miembros en 2011. Según las estadísticas, el número total de membresías aumenta en un 2% anualmente.
 - a. ¿Qué tipo de función representa el número total de membresías en esta situación?
 - b. Si la tendencia continúa, ¿qué función representa el número total de membresías en n años? ¿Cómo lo sabes? Justifica tu razonamiento.
3. Derek lanza una pelota de béisbol hacia arriba desde una altura inicial de 3 ft. La pelota llega al suelo después de 2 segundos.
 - a. ¿Cuál fue la velocidad inicial de la pelota de béisbol?
 - b. ¿Cuál es la función que representa la altura, h (en pies), de la pelota de béisbol durante un periodo de tiempo t (en segundos)?
 - c. ¿En qué tiempo la pelota de béisbol alcanzó su altura máxima? ¿Cuál fue la altura máxima de la pelota de béisbol?

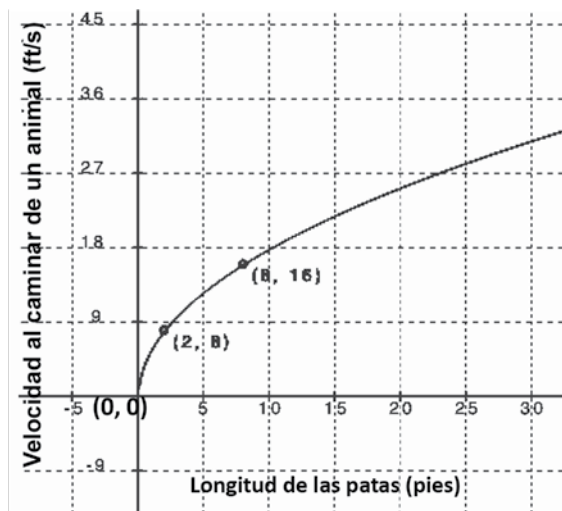
Lección 4: Representar un contexto a partir de una gráfica

Trabajo en clase

Ejemplo 1

Lee el siguiente problema. Tu maestro te ayudará durante el proceso de utilizar los pasos del ciclo de modelación como guía para tu solución.

La relación entre la longitud de una de las patas, en pies, de un animal y su velocidad al caminar, en pies por segundo, se puede representar mediante la siguiente gráfica. Nota: esta función se aplica a la velocidad al caminar, no al correr. Obviamente, un guepardo tiene patas más cortas que una jirafa, pero puede correr mucho más rápido. Sin embargo, en una carrera en la que se camina, la jirafa tiene ventaja.

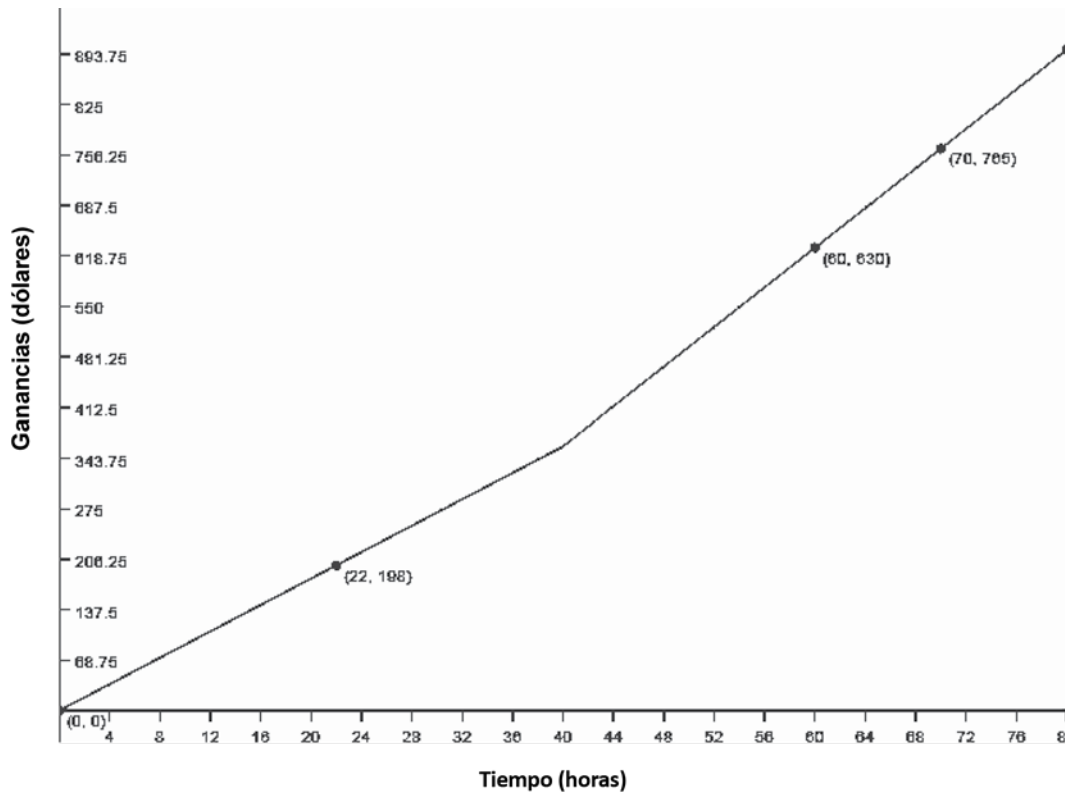


La longitud de las patas de un tiranosaurio era 20 ft. ¿Cuál era la velocidad del tiranosaurio en ft/s?

Ejercicios

Ahora practica cómo utilizar el ciclo de modelación con estos problemas:

1. Eduardo tiene un trabajo de verano en el que le pagan una determinada tarifa por hora en las primeras 40 horas cada semana y una tarifa y media por cualquier hora extra. La siguiente gráfica es una representación de cuánto dinero gana como una función de las horas que trabaja en una semana.



Los empleadores de Eduardo quieren que él sea un empleado asalariado, lo que significa que no trabaje horas extra. Si quieren pagarle \$480 por semana, pero le piden que se comprometa a trabajar 50 horas por semana, ¿debe estar de acuerdo con el cambio en el salario? Justifica tu respuesta de forma matemática.

- a. Formula (recuerda este paso de la Lección 1).
 - i. ¿Qué tipo de función puede representarse mediante una gráfica como esta (p. ej., cuadrática, lineal, exponencial, a trozos, de raíz cuadrada o de raíz cúbica)?
 - ii. ¿Cómo describirías el comportamiento final de la gráfica en el contexto de este problema?

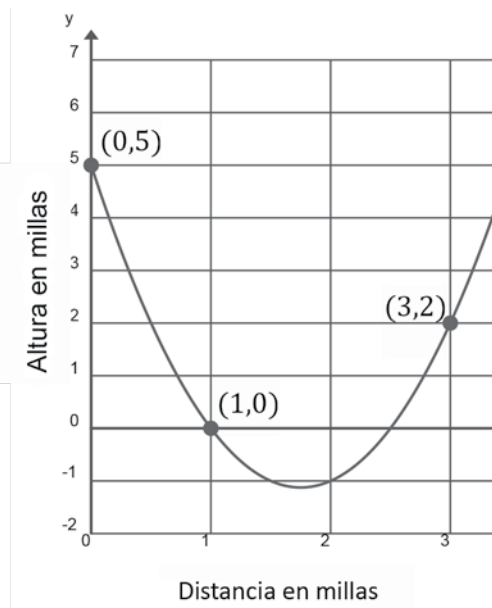
- iii. ¿De qué manera afecta esto a la ecuación de nuestra función?
- b. Calcula.
- i. ¿Qué estrategia planeas utilizar para elaborar el modelo de este contexto?
- ii. Halla la función de esta gráfica. Muestra todo el proceso.
- c. Interpreta.
- i. ¿Cuánto gana Eduardo por hora?
- ii. Si observas solo las gráficas, ¿qué intervalo tiene una razón de cambio promedio mayor: $x < 20$ o $x > 45$? Haz conexiones con la gráfica y su descripción verbal para justificar tu respuesta.

- iii. Los empleadores de Eduardo quieren que él sea un empleado asalariado, lo que significa que no trabaje horas extra. Si quieren pagarle \$480 por semana, pero le piden que se comprometa a trabajar 50 horas por semana, ¿debe estar de acuerdo con el cambio en el salario? Justifica tu respuesta de forma matemática.

d. Valida.

¿De qué manera puedes comprobar tu respuesta para asegurarte de que tu función represente la gráfica con precisión?

2. La vista de la sección transversal de un cañón de río profundo se representa mediante la gráfica que se muestra a continuación, donde tanto la altura como la distancia se miden en millas. ¿Cuál es la longitud de un puente que se extiende sobre el cañón desde el punto identificado $(1,0)$ hasta el otro lado? ¿A qué altura sobre el fondo del cañón está el puente?



a. Formula.

- i. ¿Qué tipo de función puede representarse mediante una gráfica como esta (p. ej., cuadrática, lineal, exponencial, a trozos, de raíz cuadrada o de raíz cúbica)?

- b. Calcula.
- ¿Cuáles son las características principales de la gráfica que se pueden utilizar para determinar la ecuación?
 - ¿Qué características principales de la función se deben determinar?
 - Calcula las características principales que faltan y comprueba la precisión con tu gráfica.
- c. Interpreta.
- ¿Qué dominio tiene sentido en este contexto? Explica tu respuesta.
 - ¿Cuál es el ancho del puente con un lado ubicado en $(1,0)$?
 - ¿A qué altura está el puente sobre el fondo del cañón?

- iv. Supón que el cañón mide exactamente 3.5 millas de ancho desde sus dos puntos más altos. Halla la razón de cambio promedio del intervalo desde $x = 0$ hasta $x = 3.5$, $[0, 3.5]$. Explica este fenómeno. ¿Hay otros intervalos que se comporten de forma semejante?
- d. Valida.
¿De qué manera puedes comprobar tu respuesta para asegurarte de que tu función represente la gráfica con precisión?
3. Ahora compara cuatro representaciones que se puedan utilizar en el proceso de modelación. ¿De qué manera es útil cada una para cada fase del ciclo de modelación? Explica las ventajas y las desventajas de cada una.

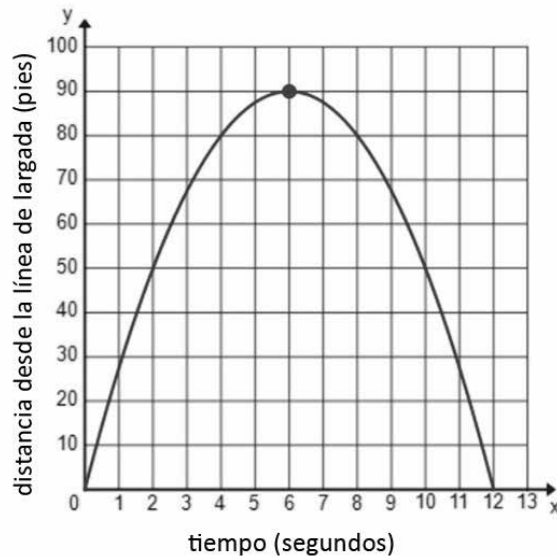
Resumen de la lección

Al hacer una representación a partir de una gráfica, utiliza el ciclo de modelación completo:

- **FORMULA:** identifica las variables utilizadas, clasifica el tipo de gráfica presentada, indica las características principales visibles y crea una representación diferente de la relación si es necesario.
- **CALCULA:** descontextualiza la gráfica de la aplicación y analízala. Es posible que tengas que hallar una representación simbólica o tabular de la gráfica para seguir analizándola.
- **INTERPRETA:** contextualiza las características de la función y tus resultados y encuéntrales un sentido en el contexto provisto.
- **VALIDA:** comprueba tus resultados con el contexto. ¿Tienen sentido tus respuestas? ¿Son precisos los cálculos? ¿Hay posibilidades de error?
- **INFORMA:** escribe tus resultados con claridad.

Grupo de problemas

1. Durante las pruebas para el equipo de atletismo, Bob hace carreras cortas de 90 pies al correr desde una línea de largada hasta la pared opuesta del gimnasio y de vuelta hasta la línea de largada. En el tiempo $t = 0$, está en la línea de largada y listo para acelerar hacia la pared opuesta. A medida que t se acerca a los 6 segundos, debe bajar la velocidad, detenerse solo un instante para tocar la pared, girar y correr de vuelta hasta la línea de largada. En la siguiente gráfica se representa su distancia, en pies, desde la línea de largada con respecto al número de segundos que han pasado para una repetición.

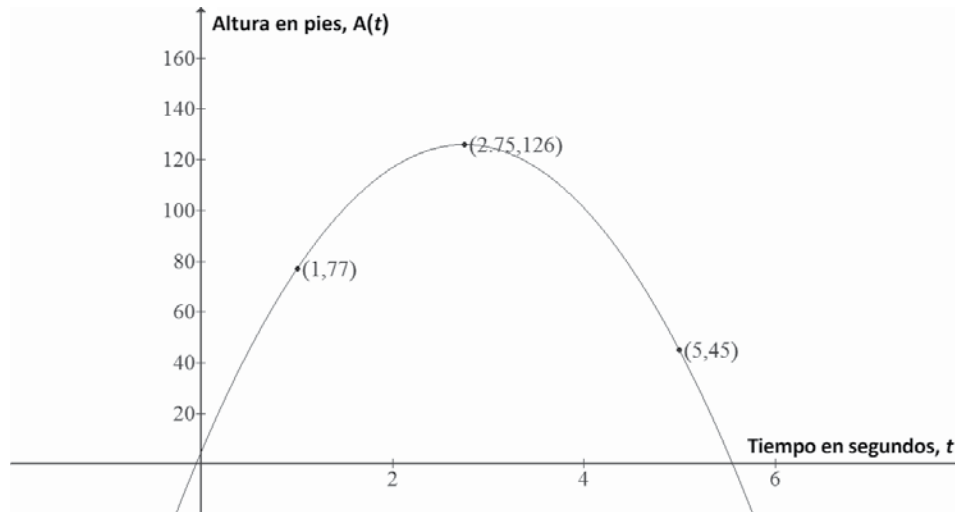


(Nota: puedes remitirte al Ejercicio 1 del Grupo de problemas de la Lección 1 como ayuda para responder esta pregunta).

¿A qué distancia estaba Bob de la línea de largada a los 2 segundos? ¿Y a los 6.5 segundos? (Las distancias, en pies, deben representarse a la décima más cercana).

2. Kyle y Abed lanzaron cada uno una pelota de béisbol al otro lado de un campo. La altura de las pelotas (en pies) se describe mediante las funciones A y K , donde t es el número de segundos que la pelota de béisbol está en el aire. K representa la altura de la pelota de béisbol de Kyle (ecuación a continuación) y A representa la altura de la pelota de béisbol de Abed (gráfica a continuación).

$$K(t) = -16t^2 + 66t + 6$$



- ¿Qué pelota estuvo en el aire durante un periodo de tiempo más largo?
- ¿La pelota de quién llega más alto?
- ¿A qué altura estaba la pelota de Abed cuando la lanzó?

Esta página queda en blanco intencionalmente.

Lección 5: Hacer una representación a partir de una secuencia

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

Una entrenadora de fútbol presenta a sus estudiantes el entrenamiento en intervalos de alta intensidad (HIIT, por sus siglas en inglés) como preparación para la temporada. La entrenadora presenta la siguiente tabla con una lista de ejercicios de un circuito de entrenamiento HIIT y el periodo de tiempo que debe dedicarse a cada ejercicio antes de que el atleta tenga un breve periodo de tiempo para descansar. Los tiempos de descanso aumentan a medida que los estudiantes completan más ejercicios del circuito. Estudia la tabla y responde las siguientes preguntas. ¿Cuánto tiempo durará el décimo ejercicio? Si una jugadora tuviera 30 minutos de tiempo real en el gimnasio durante un periodo de tiempo, ¿cuántos ejercicios podría hacer? Explica tus respuestas.

Número de ejercicio	Duración del tiempo de ejercicio	Duración del tiempo de descanso
Ejercicio 1	0.5 minutos	0.25 minutos
Ejercicio 2	0.75 minutos	0.5 minutos
Ejercicio 3	1 minuto	1 minuto
Ejercicio 4	1.25 minutos	2 minutos
Ejercicio 5	1.5 minutos	4 minutos

Ejemplo 1

Determina si la siguiente secuencia es aritmética o geométrica y halla la función que producirá cualquier término dado de la secuencia:

16, 24, 36, 54, 81, ...

¿Esta secuencia es aritmética?

¿Esta secuencia es geométrica?

¿Cuál es la representación analítica de la secuencia?

Ejercicios

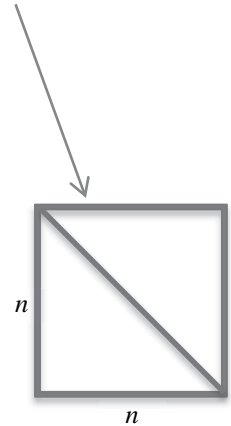
Observa la secuencia y determina la representación analítica de la secuencia. Muestra el proceso y el razonamiento.

- Un consultor en decoración cobra \$50 por la primera hora y \$2 por cada hora completa adicional. ¿Cuánto costarían 1,000 horas de consultoría?

n	1	2	3	4	5	...	n
$f(n)$	50	52	54	56	58		?

2. La siguiente secuencia representa el área de un cuadrado cuya longitud lateral es la diagonal de un cuadrado con una longitud lateral entera n . ¿Cuál sería el área del cuadrado 100? Pista: puedes usar el cuadrado a continuación para hallar el modelo de la función, pero también puedes usar solo los términos de la secuencia.

n	1	2	3	4	5	...	n
$f(n)$	2	8	18	32	50		?



3. ¿Cuál sería el décimo término de la secuencia?

n	1	2	3	4	...	n
$f(n)$	3	6	12	24		?

Resumen de la lección

- Una secuencia es una lista de números u objetos organizados en un orden especial.
- En una secuencia aritmética se pasa de un término al siguiente sumando (o restando) el mismo valor.
- En una secuencia geométrica se pasa de un término al siguiente multiplicando por (o dividiendo entre) el mismo valor.
- Observar la diferencia de las diferencias puede ser una manera rápida de determinar si una secuencia puede representarse mediante una expresión cuadrática.

Grupo de problemas

Para resolver los siguientes problemas, halla la función/fórmula que represente el n ésimo término de la secuencia.

1. A un corredor que tuvo una lesión en la rodilla le dicen que puede trotar 10 minutos cada día y que puede aumentar el tiempo de trote en 2 minutos cada dos semanas. ¿Cuánto tardará en poder trotar una hora por día?

Semana #	Tiempo de trote diario
1	10
2	10
3	12
4	12
5	14
6	14

2. Se deja caer una pelota desde una altura de 10 pies. La pelota luego rebota hasta un 80% de su altura anterior con cada rebote subsiguiente.

- Explica cómo puede representarse esta situación con una secuencia.
- ¿Hasta qué altura (*a la décima de pie más cercana*) rebota la pelota en el quinto rebote?

3. Considera la siguiente secuencia:

8, 17, 32, 53, 80, 113, ...

- ¿Qué patrón observas y qué significa ese patrón para la representación analítica de la función?
- ¿Cuál es la representación simbólica de la secuencia?

4. Arnold quiere poder completar 100 dominadas de estilo militar. Su entrenador le prepara una rutina de entrenamiento diseñada para mejorar su fuerza para las dominadas. En la siguiente tabla se muestra cuántas dominadas puede completar Arnold después de cada mes de entrenamiento. ¿Cuántos meses tardará Arnold en lograr su objetivo si el patrón continúa?

Mes	Conteo de dominadas
1	2
2	5
3	10
4	17
5	26
6	37
...	

Lección 6: Representar un contexto a partir de los datos

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

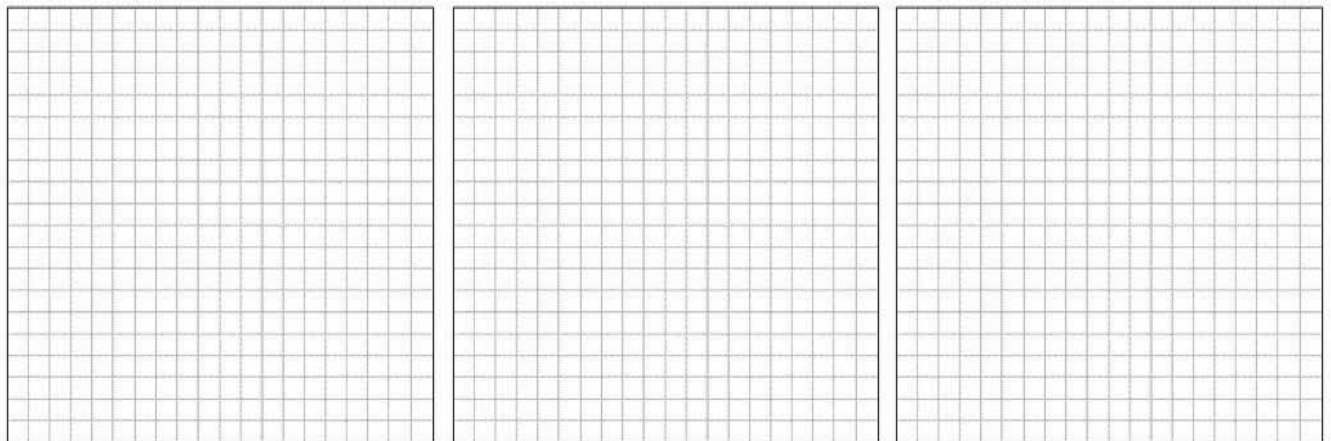
- a. Identifica el tipo de función que cada tabla parece representar (p. ej., cuadrática, lineal, exponencial, de raíz cuadrada).

A		B		C	
x	y	x	y	x	y
1	5	1	6	1	3
2	7	2	9	2	12
3	9	3	13.5	3	27
4	11	4	20.25	4	48
5	13	5	30.375	5	75

- b. Explica cómo pudiste identificar la función.

- c. Halla la representación simbólica de la función.

- d. Traza las gráficas de tus datos.

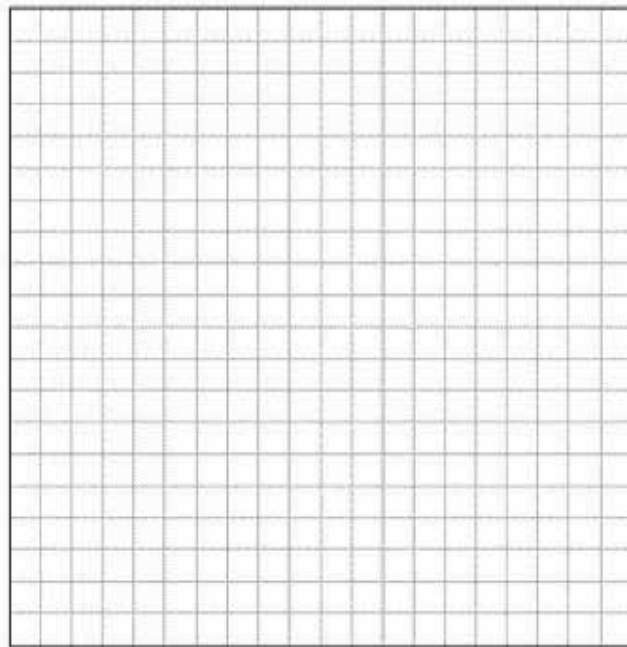


Ejemplo 1

Enrique es biólogo y ha estado controlando la población de un pez poco común en el lago Placid. Ha llevado un registro de la población durante 5 años y ha hecho los siguientes cálculos aproximados:

Año registrado	Año desde 2002	Población aproximada del pez
2002	0	1,000
2003	1	899
2004	2	796
2005	3	691
2006	4	584

Crema una gráfica y una función para representar esta situación y utilízalas para predecir (suponiendo que la tendencia continúe) cuándo la población del pez habrá desaparecido del ecosistema del lago Placid. Verifica tus resultados y explica las limitaciones de cada modelo.



Ejercicios

1. Bella es ciclista corredora de BMX y quiere identificar la relación entre el peso de su bicicleta y la altura de sus saltos (una categoría en la que es evaluada durante la carrera). En una pista de práctica, prueba 7 modelos de bicicleta con diferentes pesos y obtiene los siguientes datos.

Peso (lb)	Altura del salto (ft)
20	8.9
21	8.82
22	8.74
23	8.66
24	8.58
25	8.5
26	8.42
27	8.34

- a. Bella está auspiciada por Bicicletas Twilight y debe utilizar una bicicleta de 32 lb. ¿Cuál puede esperar que sea la altura de su salto?
- b. Bella les pide a los ingenieros de Twilight que hagan la bicicleta más liviana posible. Ellos le dicen que la bicicleta funcional más liviana que podrían hacer es de 10 lb. Según estos datos, ¿cuál es la altura máxima a la que debería esperar saltar si solo utiliza bicicletas Twilight?
- c. ¿Cuál es el peso máximo de una bicicleta si los saltos de Bella deben tener una altura de al menos 2 ft durante una carrera?

2. En la siguiente tabla se registra la concentración de un medicamento en la sangre de un paciente con el paso del tiempo.

Tiempo (horas)	Concentración del medicamento (mL)
0	0
0.5	55.5
1	83
1.5	82.5
2	54

- a. El paciente no puede estar activo mientras el medicamento está en su sangre. ¿Cuánto tiempo, al minuto más cercano, debe permanecer inactivo el paciente? ¿Cuáles son las limitaciones de tu modelo?

- b. ¿Cuál es la concentración más alta del medicamento en la sangre del paciente?

3. Un estudiante realiza un experimento y, con el paso del tiempo, disminuye el número de células en el experimento. ¿Cuántas células habrá después de 16 minutos?

Tiempo (minutos)	Células
0	5,000,000
1	2,750,000
2	1,512,500
3	831,875
4	457,531
5	251,642
6	138,403

Resumen de la lección

Cuando se da un conjunto de datos, las estrategias que se podrían utilizar para determinar el tipo de función que describe la relación entre los datos son:

- Determina las variables utilizadas y marca los puntos.
- Después de asegurarte de que los valores de x se den en intervalos regulares, busca las diferencias comunes entre los puntos de datos: la primera y la segunda.
- Primero determina el tipo de secuencia que representan los datos y luego utiliza la forma general de la ecuación de la función para hallar los parámetros de la representación simbólica de la función.

Grupo de problemas

Investiga en Internet las funciones lineales, cuadráticas y exponenciales. Para cada uno de los tres tipos de funciones, proporciona un ejemplo de un problema/una situación que hallaste en Internet donde esa función se utilizó para representar la situación o responder el problema. Incluye la función real utilizada en el ejemplo y el sitio web donde encontraste el ejemplo.

Lección 7: Representar un contexto a partir de los datos

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

¿Qué nos dice esta tabla de datos?

Edad (años)	Tiempo de los corredores de la maratón de la ciudad de Nueva York (minutos)
15	300
25	190
35	180
45	200
55	225
65	280

Ejemplo 1

Recuerda que, en el Módulo 2, utilizamos una calculadora de representación gráfica (GDC, por sus siglas en inglés) para hallar un modelo de regresión lineal. Si un modelo lineal no es apropiado para un conjunto de datos, es posible que un modelo cuadrático o exponencial se ajuste mejor. Tu calculadora gráfica es capaz de determinar diversos tipos de regresiones. Utiliza una GDC para determinar si una función cuadrática o exponencial se ajusta mejor a un conjunto de datos. Quizá necesites repasar cómo ingresar los datos en la aplicación de estadísticas de tu GDC.

Cuando estés listo para comenzar, vuelve a leer los datos presentados en el Ejercicio inicial. Utiliza tu calculadora gráfica para determinar la función que mejor se ajusta a los datos. Luego, responde algunas preguntas que tu maestro te hará sobre los datos.

Ejercicios

1. Utiliza la siguiente tabla de datos para construir un modelo de regresión y luego responde las preguntas.

Tiempo de fritura de pechugas de pollo (minutos)	Contenido de humedad (%)
5	16.3
10	9.7
15	8.1
20	4.2
25	3.4
30	2.9
45	1.9
60	1.3

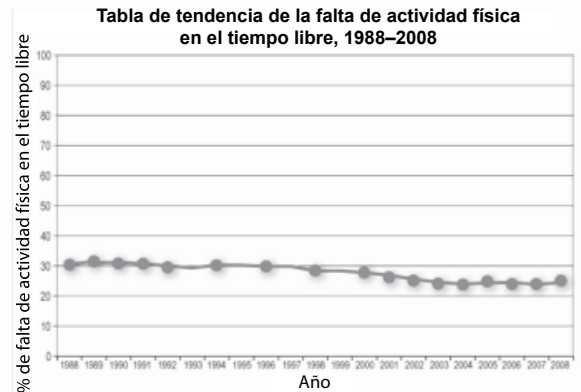
Fuente de datos: *Journal of Food Processing and Preservation*, 1995

- a. ¿Qué tipo de función parece ajustarse mejor a estos datos? Explica cómo lo sabes.
- b. Un estudiante elige una regresión cuadrática para representar estos datos. ¿Tiene razón? ¿Por qué sí o por qué no?
- c. ¿El contenido de humedad de este producto alguna vez llegará al 0%? ¿Por qué sí o por qué no?
- d. Según este modelo, ¿cuál esperarías que sea el contenido de humedad de una pechuga de pollo que se fríe durante 50 minutos?

2. Utiliza la siguiente tabla de datos para construir un modelo de regresión y luego responde las preguntas según tu modelo.

Prevalencia de la falta de actividad física en el tiempo libre, 1988–2008

Año	Años desde 1988	% de prevalencia
1988	0	30.5
1989	1	31.5
1990	2	30.9
1991	3	30.6
1992	4	29.3
1994	6	30.2
1996	8	28.4
1998	10	28.4
2000	12	27.8
2001	13	26.2
2002	14	25.1
2003	15	24.2
2004	16	23.7
2005	17	25.1
2006	18	23.9
2007	19	23.9
2008	20	25.1



- ¿Qué tendencias observas en este conjunto de datos?
- ¿Cómo interpretas esta tendencia?
- Si la tendencia continúa, ¿cuál esperaríamos que fuera el porcentaje de personas en los EE. UU. que informan la falta de actividad física en su tiempo libre en 2020?

Resumen de la lección

- Si se utilizan diagramas de datos y otras representaciones visuales de los datos, se puede determinar el tipo de función que parece ajustarse mejor a los datos. Si se utiliza el coeficiente de correlación, se puede determinar la medida de la fuerza y la dirección de una relación lineal.
- Se puede utilizar una calculadora gráfica si los conjuntos de datos son imperfectos. Para hallar una ecuación de regresión, se seguirán los mismos pasos que para una regresión lineal.

Grupo de problemas

1. Utiliza las siguientes tablas de datos para escribir un modelo de regresión y luego responde las preguntas:

Ventas de medicamentos con receta en los Estados Unidos desde 1995

Años desde 1995	Ventas de medicamentos con receta (mil millones de dólares)
0	68.6
2	81.9
3	103.0
4	121.7
5	140.7

- ¿Cuál es el mejor modelo para estos datos?
 - Según tu modelo, ¿cuáles fueron las ventas de medicamentos con receta en 2002? ¿Y en 2005?
 - Para este modelo, ¿tendría sentido utilizar valores de entrada negativos para t en tu regresión? ¿Por qué sí o por qué no?
2. Utiliza los siguientes datos para responder las preguntas a continuación:

Consumo de cereales listos para comer per cápita en los Estados Unidos por año desde 1980

Años desde 1980	Consumo de cereales (lb)	Años desde 1980	Consumo de cereales (lb)
0	12	10	15.4
1	12	11	16.1
2	11.9	12	16.6
3	12.2	13	17.3
4	12.5	14	17.4
5	12.8	15	17.1
6	13.1	16	16.6
7	13.3	17	16.3
8	14.2	18	15.6
9	14.9	19	15.5

- ¿Cuál es el mejor modelo para estos datos?
- Según tu modelo, ¿cuál esperarías que sea el consumo de cereales per cápita en 2002? ¿Y en 2005?
- Para este modelo, ¿tendrá sentido utilizar valores de entrada de t que den valores de salida negativos? ¿Por qué sí o por qué no?

Lección 8: Representar un contexto a partir de una descripción verbal

Trabajo en clase

Ejemplo 1

Christine tiene \$500 para depositar en una caja de ahorros y trata de decidirse entre dos bancos. El Banco A ofrece un 10% de interés anual computado trimestralmente. En lugar de ofrecer un interés compuesto para las cuentas más pequeñas, el Banco B ofrece agregar \$15 trimestralmente a cualquier cuenta con un saldo menor que \$1,000 por cada trimestre, siempre que no haya retiros. Christine ha decidido que no hará retiros ni depósitos por varios años.

Elabora un modelo que ayude a Christine a decidir qué banco usar.

Ejemplo 2

Alex diseñó una nueva tabla de *snowboard*. Quiere comercializarla y obtener una ganancia. El costo inicial total de fabricación, publicidad, etc. es \$500,000, y los materiales para hacer la tabla de *snowboard* cuestan \$100 por tabla.

La función de demanda por vender una tabla de *snowboard* similar es $D(p) = 50,000 - 100p$, donde p representa el precio de venta (en dólares) de cada tabla de *snowboard*.

- Escribe una expresión para cada uno de los siguientes elementos en términos de p .

Función de demanda (número de unidades que se venderán)

Ingresos [(número de unidades que se venderán)(precio por unidad, p)]

Costo total (costo de producir las tablas de *snowboard*)

- b. Escribe una expresión para representar la ganancia.
- c. ¿Cuál es el precio de venta de la tabla de *snowboard* que dará la ganancia máxima?
- d. ¿Cuál es la ganancia máxima que puede obtener Alex?

Ejercicios

Alvin acaba de cumplir 16 años. Su abuela le dijo que le dará \$10,000 para que se compre cualquier carro que quiera cuando él esté listo. Alvin quiere poder comprar el carro de sus sueños cuando cumpla 21 años y quiere un Avatar Z de 2009, que podría comprar hoy por \$25,000. El carro se deprecia (reduce su valor) a una tasa del 15% por año. Alvin quiere calcular en cuánto tiempo sus \$10,000 serán suficientes para comprar el carro, sin invertir los \$10,000.

1. Escribe la función que representa el valor depreciado del carro después de un número n de años.
- a. ¿Le alcanzará el dinero para comprar el carro cuando cumpla 21 años? Explica por qué sí o por qué no.

Después de n años	Valor del carro
1	
2	
3	
4	
5	
6	

- b. Dada la misma tasa de depreciación, ¿después de cuántos años el valor del carro será menor que \$5,000?

- c. Si la misma tasa de depreciación continuara indefinidamente, ¿después de cuántos años el valor del carro sería aproximadamente \$1?

2. Sophia planea invertir \$1,000 en tres bancos diferentes.

El Banco A le ofrece una tasa de interés anual del 12%, computado anualmente.

El Banco B le ofrece una tasa de interés anual del 12%, computado trimestralmente.

El Banco C le ofrece una tasa de interés anual del 12%, computado mensualmente.

- a. Escribe la función que describe el crecimiento de la inversión en cada banco en n años.
- b. ¿En cuántos años se duplicará su inversión inicial en cada banco? (Redondea al dólar entero más cercano).

Año	Banco A	Banco B	Banco C
Año 1			
Año 2			
Año 3			
Año 4			
Año 5			
Año 6			
Año 7			

- c. Sophia fue al Banco D. El banco ofrece un programa de “duplica su dinero” para una inversión inicial de \$1,000 en cinco años, computado anualmente. ¿Cuál es la tasa de interés anual del Banco D?

Resumen de la lección

- Podemos utilizar el ciclo de modelación completo para resolver problemas del mundo real en el contexto de los negocios y el comercio (p. ej., interés compuesto, ingresos, ganancia y costo) y del crecimiento y descenso poblacional (p. ej., crecimiento de una población, valor de depreciación y semivida) para demostrar funciones lineales, exponenciales y cuadráticas descritas verbalmente mediante gráficas, tablas o expresiones algebraicas y así lograr interpretaciones y decisiones adecuadas.
- A veces una gráfica o una tabla es el mejor modelo para problemas con ecuaciones de funciones complicadas.

Grupo de problemas

1. María invirtió \$10,000 en el mercado de valores. Desafortunadamente, el valor de su inversión ha estado bajando a una tasa promedio del 3% cada año.
 - a. Escribe la función que represente mejor la situación.
 - b. Si la tendencia continúa, ¿cuál será el valor de su inversión en 5 años?
 - c. Dada la situación, ¿qué debería hacer María con su inversión?
2. La semivida del material radiactivo que contiene Z-Med, un medicamento que se utiliza para determinados tipos de terapia, es 2 días. Un paciente recibe una dosis de 16 mCi (milicurios, una medida de radiación) en su tratamiento. (*Semivida* significa que el material radiactivo se desintegra hasta el punto en el que solo queda la mitad).
 - a. Haz una tabla para mostrar el nivel de Z-Med que hay en el cuerpo del paciente después de n días.

Número de días	Nivel de Z-Med en el paciente
0	
2	
4	
6	
8	
10	

- b. Escribe una fórmula que represente la semivida de Z-Med para n días. (Ten cuidado aquí. Asegúrate de que la fórmula funcione tanto para números pares como impares de días).
- c. ¿Cuánto material radiactivo de Z-Med queda en el cuerpo del paciente después de 20 días de recibir el medicamento?

3. Supón que se lleva a un macho y una hembra de una determinada especie de animal a una isla desierta. La población de esta especie se cuadruplica (se multiplica por 4) cada año. Supón que los animales tienen abundante suministro de alimentos y que no hay depredadores en la isla.
- ¿Qué ecuación se puede utilizar para representar la población de la especie?
 - ¿Cuál será la población de la especie después de 5 años?

Después de n años	Población
0	
1	
2	
3	
4	
5	

- Escribe una ecuación para hallar cuántos años tardará la población de los animales en superar 1 millón. Halla el número de años, ya sea utilizando la ecuación o una tabla.

Después de n años	Población
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

4. Los ingresos de una empresa en un mes dado se representan mediante $I(x) = 1,500x - x^2$ y sus costos se representan mediante $C(x) = 1,500 + 1,000x$. ¿Cuál es el precio de venta, x , de su producto que daría la máxima ganancia? Muestra o explica tu respuesta.

Esta página queda en blanco intencionalmente.

Lección 9: Representar un contexto a partir de una descripción verbal

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

¿Qué significa prestar atención a la precisión cuando se representa en matemáticas?

Ejemplo 1

El municipio Marymount logró la construcción de una central eléctrica, que abrió en 1990. Una vez que la central eléctrica abrió en 1990, la población de Marymount aumentó alrededor de un 20% cada año durante los primeros diez años y luego aumentó un 5% cada año siguiente.

a. Si la población era de 150,000 habitantes en 2010, ¿cuál era la población en 2000?

b. ¿Cómo deberías redondear tu respuesta? Explica tu respuesta.

c. ¿Cuál era la población en 1990?

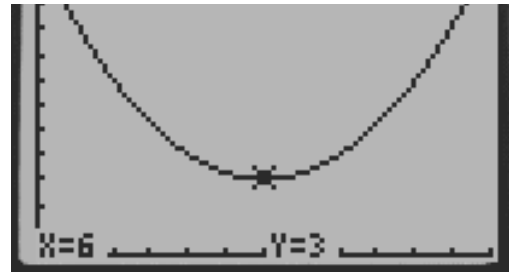
Ejemplo 2

Si la tendencia continuara, ¿cuál sería la población en 2009?

Ejercicios

1. Una tortuga y una liebre corren una carrera. La tortuga se desplaza a 4 millas por hora. La liebre se desplaza a 10 millas por hora. A medio camino en la carrera, la liebre decide dormir una siesta de 5 horas y luego se levanta y continúa a 10 millas por hora.
 - a. Si la carrera tiene 40 millas de longitud, ¿quién ganó la carrera? Apoya tu respuesta con evidencia matemática.
 - b. ¿Qué distancia (en millas) debería tener la carrera para que haya un empate entre los dos animales, si se diera la misma situación (descrita en el Ejercicio 1)?

2. En la gráfica de la derecha se representa el valor V de unas acciones populares. Su valor inicial era \$12/acción en el día 0. Nota: en la calculadora se utiliza X para representar t y Y para representar V .
- a. ¿Cuántos días después de su valor inicial en el tiempo $t = 0$ el precio de las acciones volvió a \$12 por acción?



- b. Escribe una ecuación cuadrática que represente el valor de estas acciones a lo largo del tiempo.

- c. Utiliza esta ecuación cuadrática para predecir el valor de las acciones después de 15 días.

Resumen de la lección

El ciclo de modelación completo se utiliza para interpretar la función y su gráfica, calcular la razón de cambio en un intervalo, y prestar atención a la precisión para resolver problemas del mundo real en el contexto del crecimiento y descenso poblacional y de otros problemas en secuencias geométricas o formas de funciones lineales, exponenciales y cuadráticas.

Grupo de problemas

- Según el Centro para el Control y la Prevención de Enfermedades, la tasa de cáncer de mama en las mujeres ha disminuido un 0.9% por año entre 2000 y 2009.
 - Si 192,370 mujeres fueron diagnosticadas con cáncer de mama invasivo en 2009, ¿cuántas fueron diagnosticadas en 2005? Para este problema, supón que no hay cambio en la población desde 2005 hasta 2009.
 - Según la Sociedad Estadounidense contra el Cáncer, en 2005 había 211,240 personas diagnosticadas con cáncer de mama. En una respuesta escrita, comunica qué tan precisa y exacta es tu solución de la parte (a) y explica por qué.
- Las funciones f y g representan la población de dos tipos diferentes de bacterias, donde x es el tiempo (en horas) y f y g son el número de bacterias (en miles). $f(x) = 2x^2 + 7$ y $g(x) = 2^x$.
 - Entre la tercera y la sexta hora, ¿qué bacterias tuvieron una tasa de crecimiento mayor?
 - ¿La población de g alguna vez superará a la población de f ? De ser así, ¿en qué hora?