Una historia de proporciones®

Eureka Math™

8.º grado Módulo 7

Archivo del estudiante_A

Contiene Trabajo en clase y Tareas reproducibles

Publicado por la organización sin fines de lucro Great Minds.

Impreso en EE. UU.
Este libro puede comprarse directamente en la editorial en eureka-math.org
10 9 8 7 6 5 4 3 2

G8-M7-SFA-1.1.0-07.2017

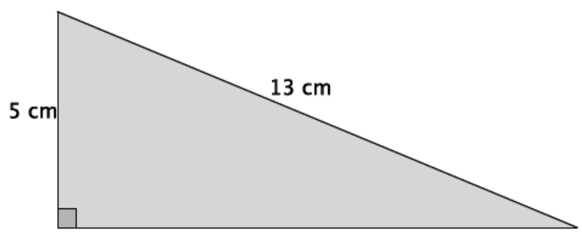
Lección 1: El Teorema de Pitágoras

Trabajo en clase

Nota: Las figuras en esta lección no están a escala.

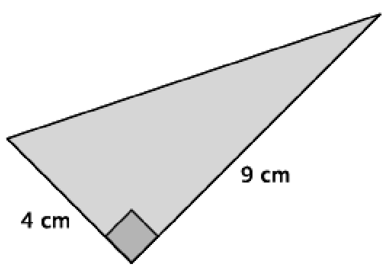
Ejemplo 1

Escribe una ecuación que permita determinar la longitud del lado que no se conoce de un triángulo rectángulo.



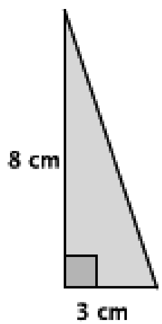
Ejemplo 2

Escribe una ecuación que permita determinar la longitud del lado que no se conoce de un triángulo rectángulo.



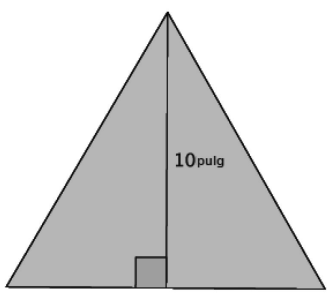
Ejemplo 3

Escribe una ecuación para determinar la longitud del lado que no se conoce del triángulo rectángulo.



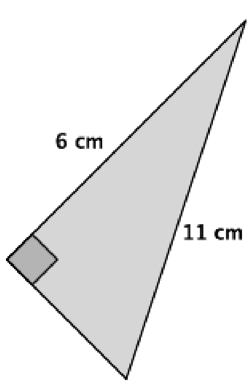
Ejemplo 4

En la figura siguiente, tenemos un triángulo equilátero con una altura de 10 pulgadas. ¿Qué sabemos acerca de un triángulo equilátero?

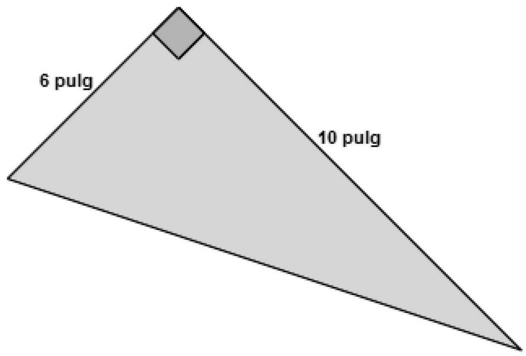


Ejercicios

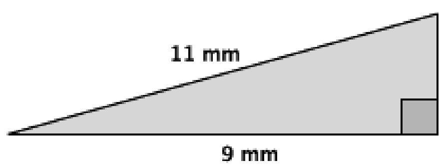
1. Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la longitud del lado que no se conoce del triángulo rectángulo con un número entero. Explica por qué tu cálculo tiene sentido.



2. Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la longitud del lado que no se conoce del triángulo rectángulo con un número entero. Explica por qué tu estimación tiene sentido.



3. Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la longitud del lado que no se conoce del triángulo rectángulo con un número entero. Explica por qué tu estimación tiene sentido.

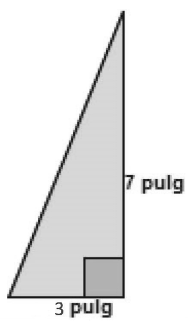


Resumen de la lección

Los números cuadrados perfectos son aquellos que son un producto de un factor de un número entero multiplicado por sí mismo. Por ejemplo, el número 25 es un número cuadrado perfecto, porque es el producto de 5 multiplicado por 5.

Cuando en un triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de un lado que no se conoce no es igual a un cuadrado perfecto, se puede estimar la longitud como un número entero determinando dónde está la longitud del cuadrado entre los dos cuadrados perfectos.

Ejemplo:



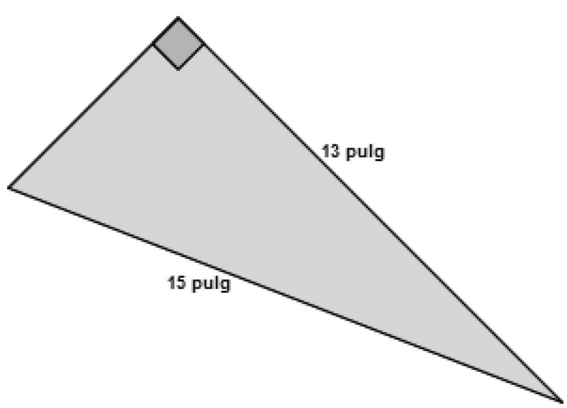
Sea que c in representa la longitud de la hipotenusa; entonces,

$$3^2 + 7^2 = c^2$$
$$9 + 49 = c^2$$
$$58 = c^2.$$

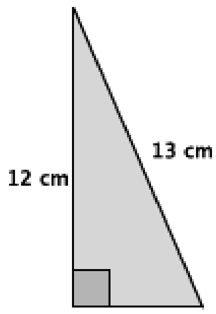
El número 58 no es un cuadrado perfecto, pero está entre los cuadrados perfectos 49 y 64. Por lo tanto, la longitud de la hipotenusa está entre 7 in y 8 in, pero más cerca de 8 in porque 58 está más cerca del cuadrado perfecto 64 que de lo que está del cuadrado perfecto 49.

Grupo de problemas

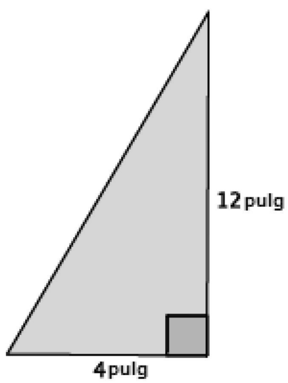
1. Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la longitud del lado que no se conoce del triángulo rectángulo. Explica por qué tu estimación tiene sentido.



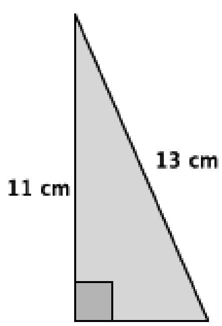
2. Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la longitud del lado que no se conoce del triángulo rectángulo. Explica por qué tu estimación tiene sentido.



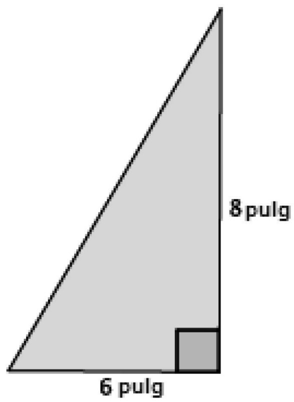
3. Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la longitud del lado que no se conoce del triángulo rectángulo. Explica por qué tu estimación tiene sentido.



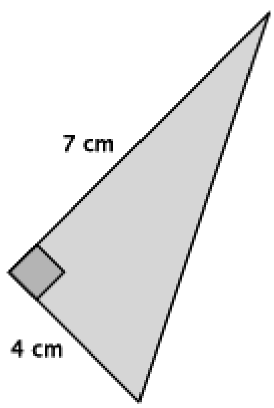
4. Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la longitud del lado que no se conoce del triángulo rectángulo. Explica por qué tu estimación tiene sentido.



5. Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la longitud del lado que no se conoce del triángulo rectángulo. Explica por qué tu estimación tiene sentido.

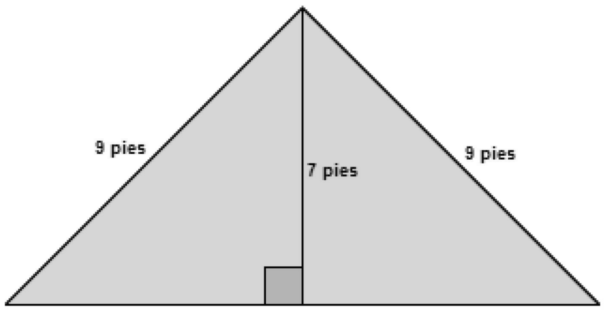


6. Determina la longitud del lado que no se conoce del triángulo rectángulo. Explica cómo sabes que tu respuesta es correcta.

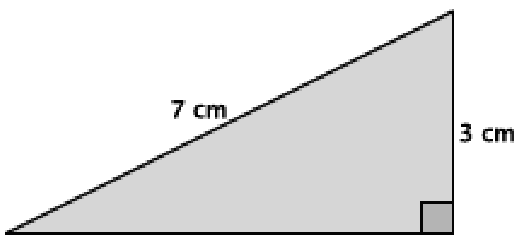


7. Utiliza el teorema de Pitágoras para calcular la longitud del lado que no se conoce del triángulo rectángulo. Explica por qué tu estimación tiene sentido.

8. El triángulo a continuación es un triángulo isósceles. Usa lo que sabes sobre el teorema de Pitágoras para determinar la longitud aproximada de la base del triángulo isósceles.



9. Calcula el área del triángulo que se muestra a continuación. Explica por qué es una buena estimación.



Lección 2: Raíces cuadradas

Trabajo en clase

Ejercicios 1–4

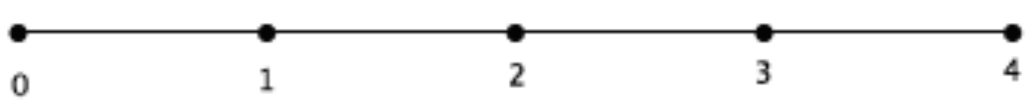
1. Determina la raíz cuadrada positiva de 81, si existiese. Explica.

2. Determina la raíz cuadrada positiva de 225, si existiese. Explica.

3. Determina la raíz cuadrada positiva de -36, si existiese. Explica.

4. Determina la raíz cuadrada positiva de 49, si existiese. Explica.

Discusión



Ejercicios 5–9

Determina la raíz cuadrada positiva del número dado. Si el número no es un cuadrado perfecto, determina el número entero de la raíz cuadrada que sería el más cercano y después, usa tus conjeturas y comprueba para dar una respuesta aproximada a una o dos cifras decimales.

5. $\sqrt{49}$

6. $\sqrt{62}$

7. $\sqrt{122}$

8. $\sqrt{400}$

9. ¿Cuáles de los números de los Ejercicios 5-8 no son cuadrados perfectos? Explica.

Resumen de la lección

Un número positivo cuyo cuadrado es igual a un número positivo $\boldsymbol{b}$ se indica por el símbolo $\sqrt{\boldsymbol{b}}$. El símbolo $\sqrt{\boldsymbol{b}}$ denota automáticamente un número positivo. Por ejemplo, $\sqrt{\mathbf{4}}$ es siempre $\mathbf{2}$, no $-\mathbf{2}$. El número $\sqrt{\boldsymbol{b}}$ se llama raíz cuadrada positiva de $\boldsymbol{b}$.

La raíz cuadrada de un cuadrado perfecto de un número entero es el número entero. Sin embargo, hay muchos números enteros que no son cuadrados perfectos.

Grupo de problemas

Determina la raíz cuadrada positiva del número dado. Si el número no es un cuadrado perfecto, determina el número entero más cercano de la raíz cuadrada.

1. $\sqrt{169}$

2. $\sqrt{256}$

3. $\sqrt{81}$

4. $\sqrt{147}$

5. $\sqrt{8}$

6. ¿Cuáles de los números en los Problemas 1-5 no son cuadrados perfectos? Explica.

7. Coloca la siguiente lista de números en sus ubicaciones aproximadas en una recta numérica.

$$\sqrt{32}, \sqrt{12}, \sqrt{27}, \sqrt{18}, \sqrt{23}, \text{ y } \sqrt{50}$$

8. ¿Entre cuáles dos números enteros se encuentra $\sqrt{45}$? Explica cómo lo sabes.

Lección 3: Existencia y unicidad de las raíces cuadradas y las raíces cúbicas

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

Los números de cada columna están relacionados. Su objetivo es determinar cómo se relacionan, determinar qué números pertenecen a las partes en blanco de las columnas y escribir una explicación de cómo se conoce que los números pertenecen allí.

Encuentra la regla – Parte 1

1	1
2	
3	9
	81
11	121
15	
	49
10	
12	
	169
m	
	n

Encuentra la regla – Parte 2

1	1
2	
3	27
	125
6	216
11	
	64
10	
7	
	$2{,}744$
p	
	q

Ejercicios

Encuentra el valor positivo de x que hace que cada ecuación sea verdadera. Comprueba tus soluciones.

1. $x^2 = 169$
   a. Explica el primer paso para resolver esta ecuación.

   b. Resuelve la ecuación y verifica tu respuesta.

2. Un parque con forma de cuadrado tiene un área de $324\ \text{yd}^2$. ¿Cuáles son las dimensiones del parque? Escribe y resuelve la ecuación.

3. $625 = x^2$

4. Un cubo tiene un volumen de $27\ \text{in}^3$. ¿Cuál es la medida de uno de sus lados? Escribe y resuelve una ecuación.

5. ¿Qué valor positivo de x hace que la siguiente ecuación sea verdadera: $x^2 = 64$? Explica.

6. ¿Qué valor positivo de x hace que la siguiente ecuación sea verdadera: $x^3 = 64$? Explica.

7. Encuentra el valor positivo de x que hace que la ecuación sea verdadera: $x^2 = 256^{-1}$.

8. Encuentra el valor positivo de x que hace que la ecuación sea verdadera: $x^3 = 343^{-1}$.

9. ¿Es 6 una solución a la ecuación $x^2 - 4 = 5x$? Explica por qué sí o por qué no.

Resumen de la lección

El símbolo $\sqrt[n]{}$ se denomina radical. Una ecuación con ese símbolo se conoce como ecuación radical. Hasta ahora, solo hemos trabajado con raíces cuadradas (es decir, $\boldsymbol{n = 2}$). Técnicamente, denotaría una raíz cuadrada positiva como $\sqrt[2]{}$, pero se entiende que el símbolo $\sqrt{}$ representa por sí solo una raíz cuadrada positiva.

Cuando $\boldsymbol{n = 3}$, entonces, el símbolo $\sqrt[3]{}$ se utiliza para denotar la raíz cúbica de un número. Dado que $\boldsymbol{x^3 = x \cdot x \cdot x}$, la raíz cúbica de $\boldsymbol{x^3}$ es $\boldsymbol{x}$ (es decir, $\boldsymbol{\sqrt[3]{x^3} = x}$).

Existe la raíz cuadrada o cúbica de un número positivo y solo puede haber una raíz cuadrada positiva o una raíz cúbica del número.

Grupo de problemas

Encuentra el valor positivo de x que hace que cada ecuación sea verdadera. Comprueba tus soluciones.

1. ¿Qué valor positivo de x hace que la siguiente ecuación sea verdadera: $x^2 = 289$? Explica.

2. Un parque con forma de cuadrado tiene un área de 400 yd^2. ¿Cuáles son las dimensiones del parque? Escribe y resuelve una ecuación.

3. Un cubo tiene un volumen de 64 in^3. ¿Cuál es la medida de uno de sus lados? Escribe y resuelve una ecuación.

4. ¿Qué valor positivo de x hace que la siguiente ecuación sea verdadera: $125 = x^3$? Explica.

5. Encuentra el valor positivo de x que hace que la ecuación sea verdadera: $x^2 = 441^{-1}$.
   a. Explica el primer paso para resolver esta ecuación.
   b. Resuelve y comprueba tu solución.

6. Encuentra el valor positivo de x que hace que la ecuación sea verdadera: $x^3 = 125^{-1}$.

7. El área de un cuadrado es 196 in^2. ¿Cuál es la longitud de un lado del cuadrado? Escribe y resuelve una ecuación y, después, comprueba tu solución.

8. El volumen de un cubo es 729 cm^3. ¿Cuál es la longitud de uno de los lados del cubo? Escribe y resuelve una ecuación y, después, comprueba tu solución.

9. ¿Qué valor positivo de x haría que la siguiente ecuación sea verdadera: $19 + x^2 = 68$?

Lección 4: Simplificación de raíces cuadradas (opcional)

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

a.
   i. ¿A qué es igual $\sqrt{16}$?
   ii. ¿A qué es igual 4×4?
   iii. ¿$\sqrt{16} = \sqrt{4\times4}$?

b.
   i. ¿A qué es igual $\sqrt{36}$?
   ii. ¿A qué es igual 6×6?
   iii. ¿$\sqrt{36} = \sqrt{6\times6}$?

c.
   i. ¿A qué es igual $\sqrt{121}$?
   ii. ¿A qué es igual 11×11?
   iii. ¿$\sqrt{121} = \sqrt{11\times11}$?

d.
   i. ¿A qué es igual $\sqrt{81}$?
   ii. ¿A qué es igual 9×9?
   iii. ¿$\sqrt{81} = \sqrt{9\times9}$?

e. Reescribe $\sqrt{20}$ usando al menos un factor cuadrado perfecto.

f. Reescribe $\sqrt{28}$ usando al menos un factor cuadrado perfecto.

Ejemplo 1

Simplifica la raíz cuadrada tanto como sea posible.

$\sqrt{50} =$

Ejemplo 2

Simplifica la raíz cuadrada tanto como sea posible.

$\sqrt{28} =$

Ejercicios 1–4

Simplifica las raíces cuadradas tanto como sea posible.

1. $\sqrt{18}$

2. $\sqrt{44}$

3. $\sqrt{169}$

4. $\sqrt{75}$

Ejemplo 3

Simplifica la raíz cuadrada tanto como sea posible.

$\sqrt{128} =$

Ejemplo 4

Simplifica la raíz cuadrada tanto como sea posible.

$\sqrt{288} =$

Ejercicios 5–8

5. Simplifica $\sqrt{108}$.

6. Simplifica $\sqrt{250}$.

7. Simplifica $\sqrt{200}$.

8. Simplifica $\sqrt{504}$.

Resumen de la lección

Las raíces cuadradas de algunos cuadrados no perfectos no se pueden simplificar mediante el uso de los factores del número. Cualquier factor de un cuadrado perfecto de un número se puede simplificar.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\sqrt{72} &= \sqrt{36\times 2}\\ &= \sqrt{36}\times\sqrt{2}\\ &= \sqrt{6^2}\times\sqrt{2}\\ &= 6\times\sqrt{2}\\ &= 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

Grupo de problemas

Simplifica cada una de las raíces cuadradas de los Problemas 1-5 tanto como sea posible.

1. $\sqrt{98}$

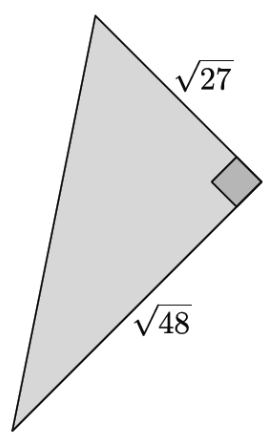
2. $\sqrt{54}$

3. $\sqrt{144}$

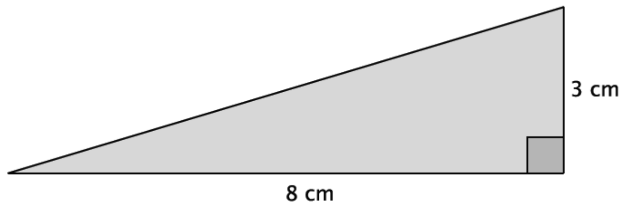
4. $\sqrt{512}$

5. $\sqrt{756}$

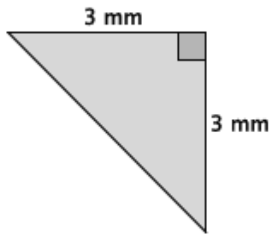
6. ¿Cuál es la longitud del lado que no se conoce de un triángulo rectángulo? Simplifica tu respuesta, si es posible.



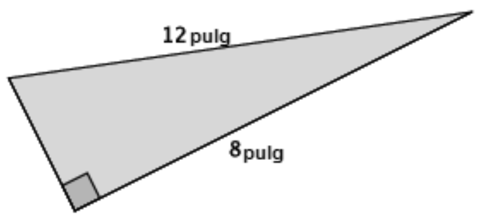
7. ¿Cuál es la longitud del lado que no se conoce de un triángulo rectángulo? Simplifica tu respuesta, si es posible.



8. ¿Cuál es la longitud del lado que no se conoce de un triángulo rectángulo? Simplifica tu respuesta, si es posible.



9. ¿Cuál es la longitud del lado que no se conoce de un triángulo rectángulo? Simplifica tu respuesta, si es posible.



10. Josué simplifica $\sqrt{450}$ como $15\sqrt{2}$. ¿Está en lo correcto? Explica por qué sí o por qué no.

11. Tiah estuvo ausente de la escuela el día que aprendiste cómo simplificar una raíz cuadrada. Utilizando $\sqrt{360}$, escribe a Tiah una explicación para simplificar raíces cuadradas.

Lección 5: Resolución de ecuaciones con radicales

Trabajo en clase

Ejemplo 1

$$x^3 + 9x = \frac{1}{2}(18x + 54)$$

Ejemplo 2

$$x(x - 3) - 51 = -3x + 13$$

Ejercicios

Encuentra el valor positivo de $\boldsymbol{x}$ que hace a cada ecuación verdadera. Después, comprueba si tu solución es correcta.

1.
   a. Resuelve $x^2 - 14 = 5x + 67 - 5x$.

   b. Explica cómo resolviste la ecuación.

2. Resuelve y simplifica: $x(x-1) = 121 - x$.

3. Un cuadrado tiene una longitud lateral de $3x$ pulgadas y un área de 324 in^2. ¿Cuál es el valor de x?

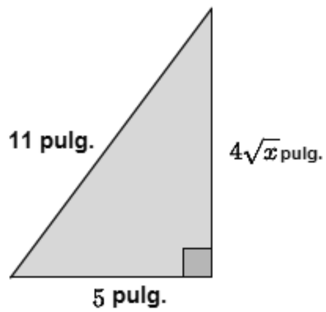
4. $-3x^3 + 14 = -67$

5. $x(x + 4) - 3 = 4(x + 19.5)$

6. $216 + x = x(x^2 - 5) + 6x$

7.

a. ¿Qué estamos tratando de determinar en el siguiente diagrama?



b. Determina el valor de x y comprueba tu respuesta.

Resumen de la lección

Las ecuaciones con variables que se elevan al cuadrado o al cubo pueden resolverse utilizando las propiedades de igualdad y la definición de raíces cuadradas y raíces cúbicas.

Simplifica una ecuación hasta que esté en la forma de $x^2 = p$ o $x^3 = p$, cuando p es un número racional positivo. Después, calcula la raíz cuadrada o raíz cúbica para determinar el valor positivo de x.

Ejemplo:

Resuelve para x.

$$\frac{1}{2}(2x^2 + 10) = 30$$
$$x^2 + 5 = 30$$
$$x^2 + 5 - 5 = 30 - 5$$
$$x^2 = 25$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$$
$$x = 5$$

Comprobación:

$$\frac{1}{2}(2(5)^2 + 10) = 30$$
$$\frac{1}{2}(2(25) + 10) = 30$$
$$\frac{1}{2}(50 + 10) = 30$$
$$\frac{1}{2}(60) = 30$$

Grupo de problemas

Encuentra el valor positivo de x que hace a cada ecuación verdadera. Después, comprueba si tu solución es correcta.

1. $x^2(x+7) = \frac{1}{2}(14x^2 + 16)$

2. $x^3 = 1331^{-1}$

3. Determina el valor positivo de x que hace a la ecuación verdadera. Después explica cómo resolviste la ecuación.

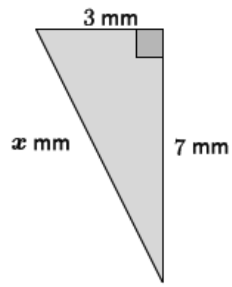
$$\frac{x^9}{x^7} - 49 = 0$$

4. Determina el valor positivo de x que hace que la ecuación sea verdadera.

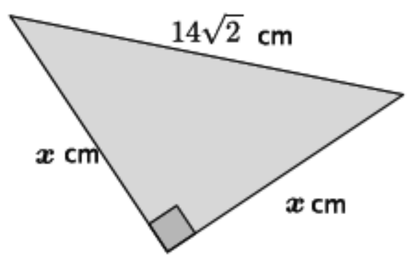
$$(8x)^2 = 1$$

5. $\left(9\sqrt{x}\right)^2 - 43x = 76$

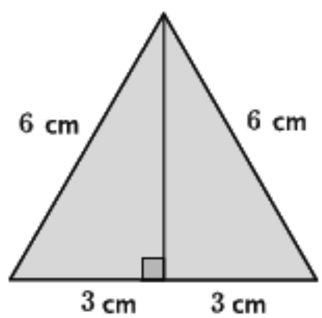
6. Determina la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo a continuación.



7. Determina la longitud de los catetos en el triángulo rectángulo a continuación.



8. Un triángulo equilátero tiene lados de 6 cm de longitud. ¿Cuál es la altura del triángulo? ¿Cuál es la superficie del triángulo?



9. Desafío: Encuentra el valor positivo de x que hace a cada ecuación verdadera.

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 3x = 7x + 8 - 10x$$

10. Desafío: Encuentra el valor positivo de x que hace a cada ecuación verdadera.

$$11x + x(x - 4) = 7(x + 9)$$

Lección 6: Decimales finitos e infinitos

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

a. Usa la división larga para determinar la expansión decimal de $\frac{54}{20}$.

b. Usa la división larga para determinar la expansión decimal de $\frac{7}{8}$.

c. Usa la división larga para determinar la expansión decimal de $\frac{8}{9}$.

d. Usa la división larga para determinar la expansión decimal de $\frac{22}{7}$.

e. ¿Qué notas acerca de las expansiones decimales de las partes (a) y (b) en comparación con las expansiones decimales de las partes (c) y (d)?

Ejemplo 1

Considera la fracción $\frac{5}{8}$. Escribe una forma equivalente de esta fracción con un denominador que sea una potencia de 10 y escribe la expansión decimal de esta fracción.

Ejemplo 2

Considera la fracción $\frac{17}{125}$. ¿Es igual a un decimal finito o infinito? ¿Cómo lo sabes?

Ejercicios 1–5

Puedes usar una calculadora, pero muestra los pasos que seguiste en cada problema.

1. Considera la fracción $\frac{3}{8}$.

   a. Escribe el denominador como un producto de 2 y/o 5. Explica por qué esta forma de volver a escribir el denominador ayuda a encontrar la representación decimal de $\frac{3}{8}$.

   b. Encuentra la representación decimal de $\frac{3}{8}$. Explica por qué tu respuesta es lógica.

2. Encuentra los cuatro primeros lugares de la expansión decimal de la fracción $\frac{43}{64}$.

3. Encuentra los cuatro primeros lugares de la expansión decimal de la fracción $\frac{29}{125}$.

4. Encuentra los cuatro primeros lugares de la expansión decimal de la fracción $\frac{19}{34}$.

5. Identifica el tipo de expansión decimal para cada uno de los números en los Ejercicios 1-4 como finito o infinito. Explica por qué su expansión decimal es tal.

Ejemplo 3

¿Será la expansión decimal $\frac{7}{80}$ finita o infinita? Si es finita, encuéntrala.

Ejemplo 4

¿Será la expansión decimal de $\frac{3}{160}$ finita o infinita? Si es finita, encuéntrala ala.

Ejercicios 6–8

Puedes usar una calculadora, pero muestra los pasos que seguiste en cada problema.

6. Convierte la fracción $\frac{37}{40}$ a un decimal.
   a. Escribe el denominador como un producto de 2 y 5. Explica por qué esta forma de reescribir el denominador ayuda a encontrar la representación decimal de $\frac{37}{40}$.

   b. Encuentra la representación decimal de $\frac{37}{40}$. Explica por qué tu respuesta es lógica.

7. Convierte la fracción $\frac{3}{250}$ a decimal.

8. Convierte la fracción $\frac{7}{1250}$ a decimal.

Resumen de la lección

Las fracciones con denominadores que se pueden expresar como productos de $\mathbf{2}$ y/o $\mathbf{5}$ son equivalentes a fracciones con denominadores que son una potencia de $\mathbf{10}$. Estas son precisamente las fracciones con expansiones de decimales finitas.

Ejemplo:

¿La fracción $\frac{1}{8}$ tiene una expansión decimal finita o infinita?

Dado que $\mathbf{8 = 2^3}$, entonces, la fracción tiene una expansión decimal finita. La expansión decimal se encuentra como

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \frac{1 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{125}{10^3} = 0.125.$$

Si el denominador de una fracción (simplificada) no se puede expresar como un producto de 2 y/o 5, entonces, la expansión decimal del número será infinita.

Grupo de problemas

Convierte cada fracción a un decimal finito, si fuera posible. Si la fracción no se puede escribir como un decimal finito, entonces, indica cómo lo sabes. Puedes usar una calculadora, pero muestra los pasos que seguiste en cada problema.

1. $\frac{2}{32}$

2. $\frac{99}{125}$

3. $\frac{15}{128}$

4. $\frac{8}{15}$

5. $\frac{3}{28}$

6. $\frac{13}{400}$

7. $\frac{5}{64}$

8. $\frac{15}{35}$

9. $\frac{199}{250}$

10. $\frac{219}{625}$

Lección 7: Decimales infinitos

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

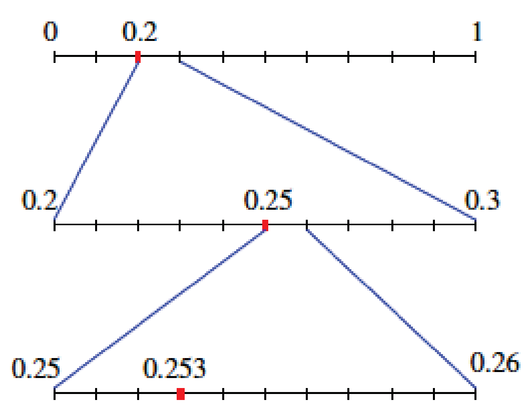
a. Escribe la forma desarrollada del decimal 0.3765 usando potencias de 10.

b. Escribe la forma desarrollada del decimal $0.3333333...$ usando potencias de 10.

c. ¿Te has preguntado sobre el valor de $0.99999...$? Algunas personas dicen que este decimal infinito tiene un valor de 1. Algunos están en desacuerdo. ¿Qué piensas?

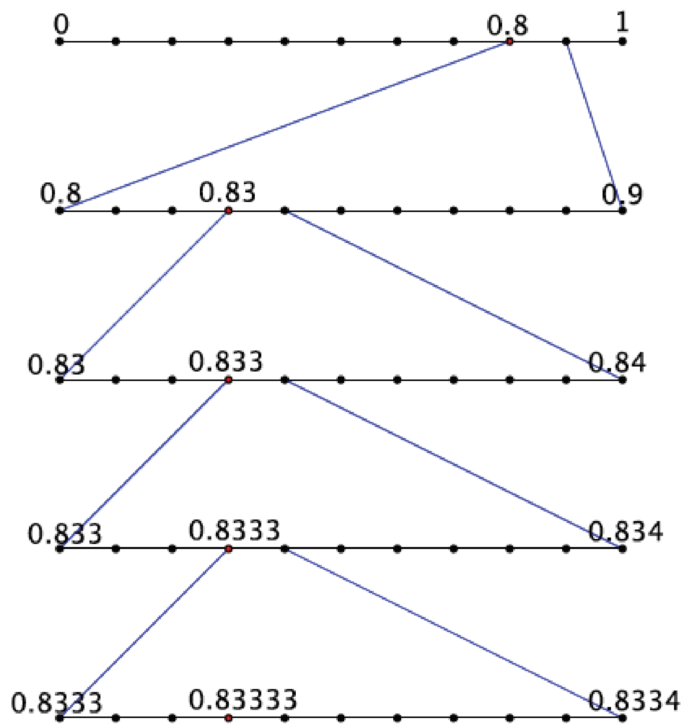
Ejemplo 1

El número 0.253 es representado en la recta numérica a continuación.



Ejemplo 2

El número $\frac{5}{6}$ que es igual a $0.833333\ldots$ o $0.8\overline{3}$ está representado parcialmente en la siguiente recta numérica.

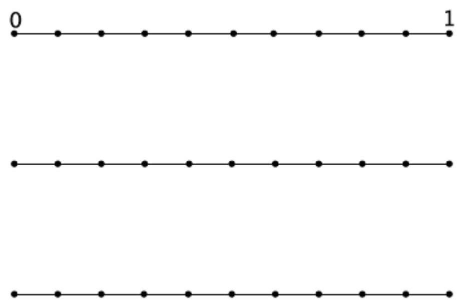


Ejercicios 1–5

1.

a. Escribe la forma desarrollada del decimal 0.125 con potencias de 10.

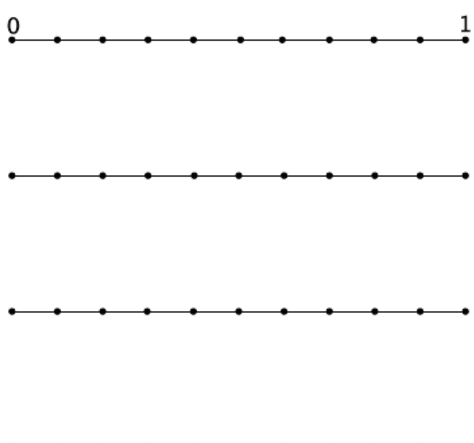
b. Muestra la ubicación del decimal 0.125 en la recta numérica.



2.

a. Escribe la forma desarrollada del decimal 0.3875 con potencias de 10.

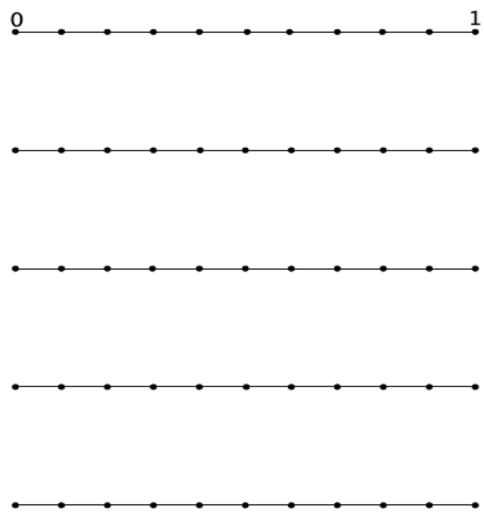
b. Muestra la ubicación del decimal 0.3875 en la recta numérica.



3.

a. Escribe la forma desarrollada del decimal $0.777777...$ con potencias de 0.777777.

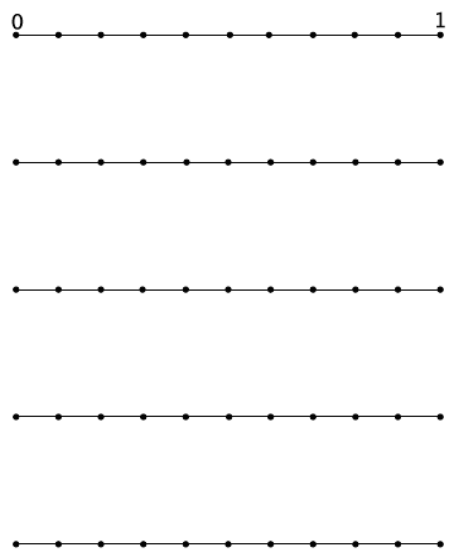
b. Muestra las primeras etapas de la ubicación del decimal $0.777777...$ en la recta numérica.



4.

a. Escribe la forma desarrollada del decimal $0.\overline{45}$ con potencias de $0.\overline{45}$.

b. Muestra las primeras etapas de la ubicación del decimal $0.\overline{45}$ en la recta numérica.



5.

a. Ordena los siguientes números de menor a mayor: 2.121212, 2.1, 2.2, y $2.\overline{12}$.

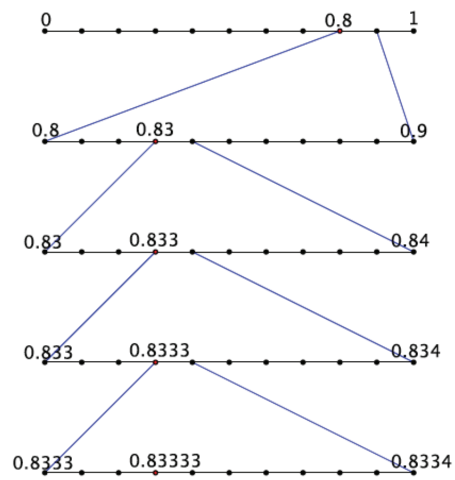
b. Explica cómo sabías en qué orden poner los números.

Resumen de la lección

Un decimal infinito es un decimal cuya forma desarrollada es infinita.

Ejemplo:
La forma desarrollada del decimal $0.8\overline{3} = 0.83333$ es $\frac{8}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \cdots$. ...

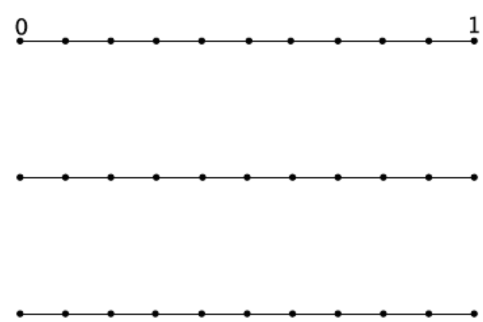
Para precisar la ubicación de un decimal infinito en la recta numérica, primero identificamos dentro de cuál decima se encuentra; después, dentro de cuál centésima se encuentra y, después, dentro de cuál milésima se encuentra y así sucesivamente. Estos intervalos tienen anchos que se acercan cada vez más al cero.



Este razonamiento nos permite deducir que el decimal infinito 0.9999 ... y 1 tienen la misma ubicación en la recta numérica. En consecuencia, $0.\overline{9} = 1$.

Grupo de problemas

1.



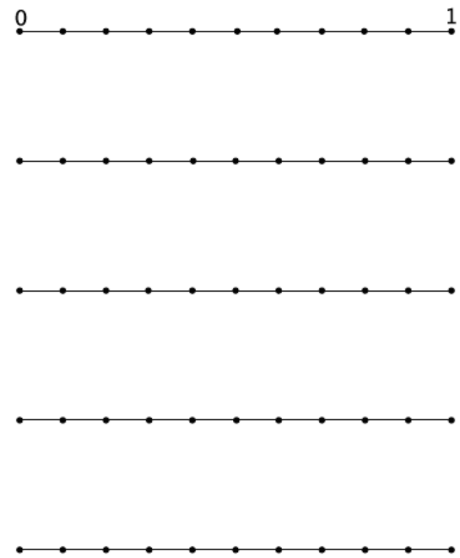
a. Escribe la forma desarrollada del decimal 0.625 con potencias de 10.

b. Ubica el decimal 0.625 en la recta numérica.

2.

a. Escribe la forma desarrollada del decimal $0.\overline{370}$ con potencias de 10.

b. Muestra las primeras etapas de la ubicación del decimal $0.370370...$ en la recta numérica.



3. ¿Cuál es una representación más precisa de la fracción $\frac{2}{3}$: 0.6666 o $0.\overline{6}$? Explica. ¿Cuál preferirías calcular?

4. Explica por qué acortamos los decimales infinitos a decimales finitos para realizar las operaciones. Explica el efecto de acortar un decimal infinito en nuestras respuestas.

5. Un compañero de clase se perdió la discusión acerca de por qué $0.\overline{9} = 1$. Convence a tu compañero de clase de que esta igualdad es verdadera.

6. Explica por qué $0.3333 < 0.33333$.

Lección 8: El algoritmo de la división larga

Trabajo en clase

Ejemplo 1

Muestra que la expansión decimal de $\frac{26}{4}$ es 6.5.

Desafío de exploración/Ejercicios 1–5

1.

a. Usa la división larga para determinar la expansión decimal de $\frac{142}{2}$.

b. Completa los espacios en blanco para mostrar otra forma de determinar la expansión decimal de $\frac{142}{2}$.

$$142 = \_\_\_\_ \times 2 + \_\_\_\_$$

$$\frac{142}{2} = \frac{\_\_\_\_ \times 2 + \_\_\_\_}{2}$$

$$\frac{142}{2} = \frac{\_\_\_\_ \times 2}{2} + \frac{\_\_\_\_}{2}$$

$$\frac{142}{2} = \_\_\_\_ + \frac{\_\_\_\_}{2}$$

$$\frac{142}{2} = \_\_\_\_\_\_$$

c. ¿El número $\frac{142}{2}$ tiene una expansión decimal finita o infinita?

2.

a. Usa la división larga para determinar la expansión decimal de $\frac{142}{4}$.

b. Completa los espacios en blanco para mostrar otra forma de determinar la expansión decimal de $\frac{142}{4}$.

$$142 = \underline{\qquad} \times 4 + \underline{\qquad}$$

$$\frac{142}{4} = \frac{\underline{\qquad} \times 4 + \underline{\qquad}}{4}$$

$$\frac{142}{4} = \frac{\underline{\qquad} \times 4}{4} + \frac{\underline{\qquad}}{4}$$

$$\frac{142}{4} = \underline{\qquad} + \frac{\underline{\qquad}}{4}$$

$$\frac{142}{4} = \underline{\qquad\qquad}$$

c. ¿El número $\frac{142}{4}$ tiene una expansión decimal finita o infinita?

3.

a. Usa la división larga para determinar la expansión decimal de $\frac{142}{6}$.

b. Completa los espacios en blanco para mostrar otra forma de determinar la expansión decimal de $\frac{142}{6}$.

$$142 = \underline{\quad\quad} \times 6 + \underline{\quad\quad}$$

$$\frac{142}{6} = \frac{\underline{\quad\quad} \times 6 + \underline{\quad\quad}}{6}$$

$$\frac{142}{6} = \frac{\underline{\quad\quad} \times 6}{6} + \frac{\underline{\quad\quad}}{6}$$

$$\frac{142}{6} = \underline{\quad\quad} + \frac{\underline{\quad\quad}}{6}$$

$$\frac{142}{6} = \underline{\quad\quad\quad\quad\quad}$$

c. ¿El número $\frac{142}{6}$ tiene una expansión decimal finita o infinita?

4.

a. Usa la división larga para determinar la expansión decimal de $\frac{142}{11}$.

b. Completa los espacios en blanco para mostrar otra forma de determinar la expansión decimal de $\frac{142}{11}$..

$$142 = \_\_\_\_ \times 11 + \_\_\_\_$$

$$\frac{142}{11} = \frac{\_\_\_\_ \times 11 + \_\_\_\_}{11}$$

$$\frac{142}{11} = \frac{\_\_\_\_ \times 11}{11} + \frac{\_\_\_\_}{11}$$

$$\frac{142}{11} = \_\_\_\_ + \frac{\_\_\_\_}{11}$$

$$\frac{142}{11} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

c. ¿El número $\frac{142}{11}$ tiene una expansión decimal finita o infinita?

5. En general, ¿cuáles fracciones producen expansiones decimales infinitas?

Ejercicios 6–10

6. ¿El número $\frac{65}{13}$ tiene una expansión decimal finita o infinita? ¿Su expansión decimal tiene un patrón periódico?

7. ¿El número $\frac{17}{11}$ tiene una expansión decimal finita o infinita? ¿Su expansión decimal tiene un patrón periódico?

8. ¿El número $0.212112111211112111112\ldots$ es racional? Explica. (Supón que el modelo que ves en la expansión decimal continúa).

9. ¿El número $\frac{860}{999}$ tiene una expansión decimal finita o infinita? ¿Su expansión decimal tiene un patrón periódico?

10. ¿El número $0.1234567891011121314151617181920212223\ldots$ es racional? Explica. (Supón que el modelo que ves en la expansión decimal continúa).

Resumen de la lección

Un número racional es un número que se puede escribir en la forma $\frac{a}{b}$ para un par de enteros a y b con b diferente a cero.

El algoritmo de la división larga muestra que cada número racional tiene una expansión decimal que cae en un patrón periódico. Por ejemplo, el número racional 32 tiene una expansión decimal de $32.\overline{0}$, el número racional $\frac{1}{3}$ tiene una expansión decimal de $0.\overline{3}$ y el número racional $\frac{4}{11}$ tiene una expansión decimal de $0.\overline{45}$.

Grupo de problemas

1. Escribe la expansión decimal de $\frac{7000}{9}$ como un decimal largo de repetición infinita.

2. Escribe la expansión decimal de $\frac{6555555}{3}$ como un decimal largo de repetición infinita.

3. Escribe la expansión decimal de $\frac{350000}{11}$ como un decimal largo de repetición infinita.

4. Escribe la expansión decimal de $\frac{12000000}{37}$ como un decimal largo de repetición infinita.

5. Alguien se da cuenta de que la división larga de 2,222,222 por 6 tiene un cociente de $370,370$ y un resto de 2 y se pregunta por qué se repite un bloque de dígitos en el cociente, indicado como 370. Explica a la persona por qué sucede esto.

6. ¿La respuesta al problema de la división $10 \div 3.2$, ¿es un número racional? Explica.

7. ¿Es $\frac{3\pi}{77\pi}$ un número racional? Explica.

8. La expansión decimal de un número real x tiene 0 en cada dígito, excepto en el primer dígito, el décimo dígito, el centésimo dígito, el milésimo dígito y así sucesivamente, en cada 1. ¿Es x un número racional? Explica.

Lección 9: Expansiones decimales de fracciones, Parte 1

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

a. Calcula las expansiones decimales de $\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{9}$.

b. ¿Cuánto es $\frac{5}{6}+\frac{7}{9}$ como una fracción? ¿Cuál es la expansión decimal de esta fracción?

c. ¿Cuánto es $\frac{5}{6}\times\frac{7}{9}$ como una fracción? De acuerdo con la calculadora, ¿cuál es la expansión decimal de la respuesta?

d. Si solo se te dieron las expansiones decimales de $\frac{5}{6}$ y $\frac{7}{9}$, sin saber las fracciones que las produjeron, ¿crees que podrías agregar fácilmente los dos decimales para encontrar la expansión decimal de su suma? ¿Podrían multiplicarse fácilmente los dos decimales para encontrar la expansión decimal de su producto?

Ejercicio 1

Dos números irracionales x y y tienen expansiones decimales infinitas que comienzan con 0.67035267 ... para x y 0.84991341... para y.

a. Explica por qué 0.670 es una aproximación de x con un error menor que una milésima. Explica por qué 0.849 es una aproximación de y con un error menor que una milésima.

b. Usa las aproximaciones indicadas en la parte (a), ¿cuál es el valor aproximado para $x + y$, para $x \times y$ y para $x^2 + 7y^2$?

c. Repite la parte (b), pero usa aproximaciones para x y y que tengan errores menores que $\frac{1}{10^5}$.

Ejercicio 2

Dos números reales tienen expansiones decimales que comienzan con lo siguiente:

$$x = 0.1538461\ldots.$$

$$y = 0.3076923\ldots.$$

a. Usa aproximaciones de x e y con una precisión de $\frac{1}{10^3}$, encuentra los valores aproximados para $x + y$ y $y - 2x$.

b. Usa aproximaciones de x e y con una precisión de $\frac{1}{10^7}$, encuentra valores aproximados para $x + y$ y $y - 2x$.

c. Revelamos ahora que $x = \frac{2}{13}$ y $y = \frac{4}{13}$. ¿Qué tan exacto es su valor aproximado a $y - 2x$ de la parte (a)? ¿De la parte (b)?

d. Calcula los primeros siete lugares decimales de $\frac{6}{13}$. ¿Qué tan exacto es su valor aproximado a $x + y$ de la parte (a)? ¿De la parte (b)?

Resumen de la lección

No está claro cómo realizar las operaciones aritméticas con números dados como decimales infinitamente largos. Si aproximamos estos números truncando sus expansiones decimales infinitamente largas y que sean así números finitos de cifras decimales, entonces podemos realizar operaciones aritméticas con los valores aproximados para estimar las respuestas.

Truncar una expansión decimal de n lugares decimales nos da una aproximación con un error menor que $\frac{1}{10^n}$. Por ejemplo, 0.676 es una aproximación de $0.676767\ldots$ con un error menor que 0.001.

Grupo de problemas

1. Dos números irracionales x y y tienen expansiones decimales infinitas que comienzan en $0.3338117\ldots$ para x y $0.9769112\ldots$ para y.
   a. Explica por qué 0.33 es una aproximación de x con un error menor que una centésima. Explica por qué 0.97 es una aproximación de y con un error menor que una centésima.
   b. Usa las aproximaciones de la parte (a), ¿cuál es el valor aproximado para $2x(y+1)$?
   c. Repite la parte (b), pero usa aproximaciones para x e y que tienen errores menores que $\frac{1}{10^6}$.

2. Dos números reales tienen expansiones decimales que comienzan con lo siguiente:

$$x = 0.70588\ldots.$$

$$y = 0.23529\ldots.$$

   a. Usa las aproximaciones de x e y con una precisión de $\frac{1}{10^2}$, y encuentra los valores aproximados para $x + 1.25y$ y $\frac{x}{y}$.
   b. Usa aproximaciones de x e y con una precisión de $\frac{1}{10^4}$, y encuentra los valores aproximados para $x + 1.25y$ y $\frac{x}{y}$.
   c. Revelamos que x e y son números racionales con la propiedad de que cada uno de los valores de $x + 1.25e$ y $\frac{x}{y}$ son números enteros. Haz una conjetura del valor de los números enteros y utiliza tus conjeturas para encontrar cuáles podrían ser las fracciones de x e y.

Lección 10: Conversión de decimales periódicos a fracciones

Trabajo en clase

Ejemplo 1

Hay una fracción con una expansión decimal infinita de $0.\overline{81}$. Encuentra la fracción.

Ejercicios 1–2

1. Hay una fracción con una expansión decimal infinita de $0.\overline{123}$. Sea $x = 0.\overline{123}$.
   a. Explica por qué el hecho de observar a $1000x$ nos ayuda a encontrar la representación fraccionaria x.

b. Escribe x como fracción.

c. ¿Es lógica tu respuesta? Comprueba tu respuesta con una calculadora.

2. Hay una fracción con una expansión decimal de $0.\overline{4}$. Encuentra la fracción y comprueba tu respuesta utilizando una calculadora.

Ejemplo 2

¿Podría $2.13\overline{8}$ ser también una fracción?

Ejercicios 3–4

3. Encuentra la fracción que es igual al número $1.6\overline{23}$. Comprueba tu respuesta con una calculadora.

4. Encuentra la fracción que es igual al número $2.9\overline{60}$. Comprueba tu respuesta con una calculadora.

Resumen de la lección

Cada decimal con un patrón repetitivo es un número racional y tenemos los medios para determinar la fracción que tiene una expansión decimal periódica dada.

Ejemplo: Encuentra la fracción que es igual al número $0.\overline{567}$.

Sea que x representa el decimal infinito $0.\overline{567}$.

$x = 0.\overline{567}$	
$10^3x = 10^3(0.\overline{567})$	Multiplica por 10^3 porque hay 3 dígitos que se
$1000x = 567.\overline{567}$	repiten.
$1000x = 567 + 0.\overline{567}$	Simplifica
$1000x = 567 + x$	Por suma
$1000x - x = 567 + x - x$	Por sustitución; $x = 0.\overline{567}$
$999x = 567$	Propiedad de igualdad de la resta
$\frac{999}{999}x = \frac{567}{999}$	Simplifica
$x = \frac{567}{999} = \frac{63}{111}$	Propiedad de igualdad de la división:
	Simplifica

Puede ser necesario utilizar más de una vez este proceso cuando los dígitos que se repiten, como en el caso de $1.2\overline{6}$, no comienzan inmediatamente después del punto decimal.

Los números irracionales son números que no son racionales. Tienen expansiones decimales infinitas que no se repiten y que no pueden ser expresadas como $\frac{p}{q}$ para los enteros p y q con $q \neq 0$.

Grupo de problemas

1.
   a. Sea $x = 0.\overline{631}$. Explica por qué multiplicar ambos lados de esta ecuación por 10^3 nos ayudará a determinar la representación fraccionaria de$x$.
   b. ¿Qué fracción es x?
   c. ¿Es lógica tu respuesta? Comprueba tu respuesta con una calculadora.

2. Encuentra la fracción que es igual al número $3.40\overline{8}$. Comprueba tu respuesta con una calculadora.

3. Encuentra la fracción que es igual al número $0.\overline{5923}$. Comprueba tu respuesta con una calculadora.

4. Encuentra la fracción que es igual al número $2.3\overline{82}$. Comprueba tu respuesta con una calculadora.

5. Encuentra la fracción que es igual al número $0.\overline{714285}$. Comprueba tu respuesta con una calculadora.

6. Explica por qué un decimal infinito que no es un decimal periódico no puede ser racional.

7. En una lección anterior, estábamos convencidos de que es aceptable escribir $0.\overline{9} = 1$. Usa lo que aprendiste hoy para demostrar que es verdadero.

8. Examina los siguientes decimales infinitos periódicos y sus fracciones equivalentes. ¿Qué notas? ¿Por qué crees que esto es verdadero?

$$0.\overline{81} = \frac{81}{99} \qquad 0.\overline{4} = \frac{4}{9} \qquad 0.\overline{123} = \frac{123}{999} \qquad 0.\overline{60} = \frac{60}{99}$$

$$0.\overline{4311} = \frac{4311}{9999} \qquad 0.\overline{01} = \frac{1}{99} \qquad 0.\overline{3} = \frac{1}{3} = \frac{3}{9} \qquad 0.\overline{9} = 1.0$$

Lección 11: La expansión decimal de algunos números irracionales

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

Ubica $\sqrt{28}$ en una recta numérica. Haz una conjetura en cuanto a los primeros valores de la expansión decimal de $\sqrt{28}$**.** Explica tu razonamiento.

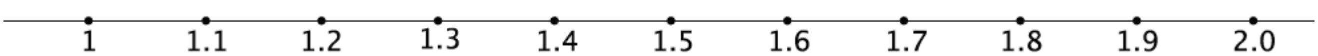
Ejemplo 1

Considera la expansión decimal de $\sqrt{3}$.

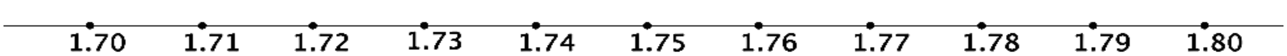
Encuentra los dos primeros valores de la expansión decimal usando el siguiente dato: si $\boldsymbol{c^2 < 3 < d^2}$ para los números positivos $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{d}$, entonces, $\boldsymbol{c < \sqrt{3} < d}$.

Primera aproximación: porque $1 < 3 < 4$, tenemo $1 < \sqrt{3} < 2$.

Segunda aproximación:



Tercera aproximación:

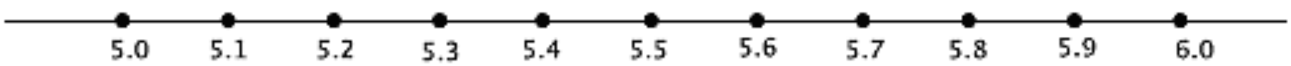


Ejemplo 2

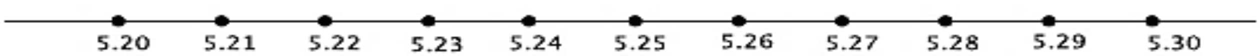
Encuentra los primeros lugares de la expansión decimal de $\sqrt{28}$.

Primera aproximación:

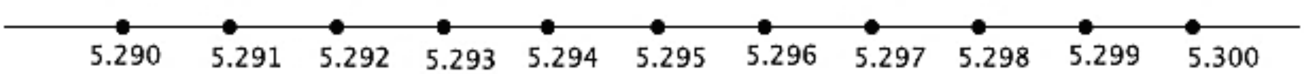
Segunda aproximación:



Tercera aproximación:



Cuarta aproximación:



Ejercicio 1

¿En qué intervalo de las centésimas se encuentra $\sqrt{14}$? Demuestra tu trabajo.

Resumen de la lección

Para encontrar los primeros lugares decimales de la expansión decimal de la raíz cuadrada de un cuadrado no perfecto, primero hay que determinar entre cuáles dos enteros se encuentra la raíz cuadrada; después, en qué intervalo de las décimas se encuentra la raíz cuadrada y, luego, en qué intervalo de las centésimas se encuentra la raíz cuadrada, y así sucesivamente.

Ejemplo: Encuentra los primeros lugares decimales de $\sqrt{22}$.

Comienza por determinar entre cuáles dos enteros se encuentra el número.
$\sqrt{22}$ está entre los números enteros 4 y 5 porque $16 < 22 < 25$.

Después, determina en qué intervalo de las décimas se encuentra el número.
$\sqrt{22}$ está entre 4.6 y 4.7 porque $4.6^2 = 21.16 < 22 < 4.7^2 = 22.09$.

Luego, determina en qué intervalo de las centésimas se encuentra el número.
$\sqrt{22}$ está entre 4.69 y 4.70 porque $4.69^2 = 21.9961 < 22 < 4.70^2 = 22.0900$.

Una buena estimación del valor de $\sqrt{22}$ es 4.69. Es correcto, con dos lugares decimales y, por lo tanto, tiene un error no mayor a 0.01.

Observa que con cada paso de este proceso nos estamos acercando cada vez más al valor real de $\sqrt{22}$.
Este proceso puede continuar utilizando intervalos de las milésimas, diezmilésimas y así sucesivamente.

Grupo de problemas

1. ¿Entre qué intervalo de las centésimas se encuentra $\sqrt{84}$ en la recta numérica?

2. Determina la aproximación con tres dígitos decimales del número $\sqrt{34}$.

3. Escribe la expansión decimal de $\sqrt{47}$ con al menos dos dígitos decimales.

4. Escribe la expansión decimal de $\sqrt{46}$ con al menos dos dígitos decimales.

5. Explica cómo mejorar la exactitud de la expansión decimal de un número irracional.

6. ¿El número $\sqrt{144}$ es racional o irracional? Explica.

7. ¿El número $0.\overline{64} = 0.646464646\ldots$ es racional o irracional? Explica.

8. Henri calcula los primeros 100 dígitos decimales del número $\frac{352}{541}$ y tiene

$$0.650646950092421441774491682070240295748613678373382624768946$$
$$395563770794824399260628465804066543438077634011090573012941\ldots.$$

No vio ningún patrón periódico decimal, así que llegó a la conclusión de que el número es irracional. ¿Estás de acuerdo con la conclusión de Henri? Si no es así, ¿qué le dirías a Henri?

9. Usa una calculadora para determinar la expansión decimal de $\sqrt{35}$. ¿El número parece ser racional o irracional? Explica.

10. Usa una calculadora para determinar la expansión decimal de $\sqrt{101}$. ¿El número parece ser racional o irracional? Explica.

11. Usa una calculadora para determinar la expansión decimal de $\sqrt{7}$. ¿El número parece ser racional o irracional? Explica.

12. Usa una calculadora para determinar la expansión decimal de $\sqrt{8720}$. ¿El número parece ser racional o irracional? Explica.

13. Usa una calculadora para determinar la expansión decimal de $\sqrt{17956}$. ¿El número parece ser racional o irracional? Explica.

14. Dado que el número $\frac{3}{5}$ es racional, ¿es necesario que el número $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ sea también racional? Explica.

15. Si un número x es racional, ¿es necesario que el número x^2 sea también racional? Explica.

16. Desafío: Determina la aproximación con dos dígitos del número decimal $\sqrt[3]{9}$.

Lección 12: Expansiones decimales de fracciones, Parte 2

Trabajo en clase

Ejemplo 1

Encuentra la expansión decimal de $\frac{35}{11}$.

Ejercicios 1–3

1. Encuentra la expansión decimal de $\frac{5}{3}$ sin utilizar la división larga.

2. Encuentra la expansión decimal de $\frac{5}{11}$ sin utilizar la división larga.

3. Encuentra la expansión decimal del número $\frac{23}{99}$ primero sin el uso de la división larga y, después, usa la división larga.

Resumen de la lección

Para los números racionales, no hay necesidad de adivinar y comprobar en qué intervalo de las décimas, centésimas o milésimas se encontrará el número.

Por ejemplo, para determinar dónde se encuentra la fracción $\frac{1}{8}$ en el intervalo de décimas, se debe calcular utilizando la siguiente desigualdad:

$\frac{m}{10} < \frac{1}{8} < \frac{m+1}{10}$	Utilizamos el denominador de 10 porque tenemos que encontrar los dígitos de las décimas $\frac{1}{8}$.
$m < \frac{10}{8} < m+1$	Multiplicamos por 10.
$m < 1\frac{1}{4} < m+1$	Simplificamos la fracción $\frac{10}{8}$.

La última desigualdad implica que $m = 1$ y $m + 1 = 2$ porque $1 < 1\frac{1}{4} < 2$. Entonces, el dígito de las décimas de la expansión decimal de $\frac{1}{8}$ es 1.

Para saber en qué intervalo se encuentran las centésimas de $\frac{1}{8}$, buscamos los enteros consecutivos m y $m + 1$ dado que

$$\frac{1}{10} + \frac{m}{100} < \frac{1}{8} < \frac{1}{10} + \frac{m+1}{100}.$$

Esto es equivalente a

$$\frac{m}{100} < \frac{1}{8} - \frac{1}{10} < \frac{m+1}{100},$$

por lo que calculamos $\frac{1}{8} - \frac{1}{10} = \frac{2}{80} = \frac{1}{40}$. Tenemos

$$\frac{m}{100} < \frac{1}{40} < \frac{m+1}{100}.$$

Si multiplicamos por 100, nos da

$$m < \frac{10}{4} < m + 1.$$

Esta desigualdad implica que $m = 2$ y $m + 1 = 3$ porque $2 < 2\frac{1}{2} < 3$. Entonces, el dígito de las centésimas de la expansión decimal de $\frac{1}{8}$ es 2.

Podemos seguir el proceso hasta que la expansión decimal se complete o hasta que sospechemos un patrón repetitivo que podamos comprobar.

Grupo de problemas

1. Sin utilizar la división larga, explica por qué la décima del dígito $\frac{3}{11}$ es 2.

2. Encuentra la expansión decimal de $\frac{25}{9}$ sin utilizar la división larga.

3. Encuentra la expansión decimal de $\frac{11}{41}$ con al menos 5 dígitos sin utilizar la división larga.

4. ¿Qué número es mayor: $\sqrt{10}$ o $\frac{28}{9}$? Responde esta pregunta sin utilizar la división larga.

5. Sam dice que $\frac{7}{11} = 0.63$ y Jaylen dice que $\frac{7}{11} = 0.636$. ¿Quién tiene razón? ¿Por qué?

Lección 13: Comparación de números irracionales

Trabajo en clase

Desafío de exploración/Ejercicios 1–11

1. Rodney piensa que $\sqrt[3]{64}$ es mayor que $\frac{17}{4}$. Sam piensa que $\frac{17}{4}$ es mayor. ¿Quién está en lo correcto y por qué?

2. ¿Qué número es menor, $\sqrt[3]{27}$ o 2.89? Explica.

3. ¿Qué número es menor, $\sqrt{121}$ o $\sqrt[3]{125}$? Explica.

4. ¿Qué número es menor, $\sqrt{49}$ o $\sqrt[3]{216}$? Explica.

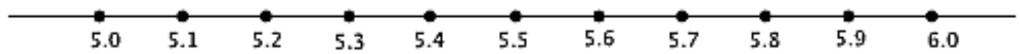
5. ¿Qué número es mayor, $\sqrt{50}$ o $\frac{319}{45}$? Explica.

6. ¿Qué número es mayor, $\frac{5}{11}$ o $0.\overline{4}$? Explica.

7. ¿Qué número es mayor, $\sqrt{38}$ o $\frac{154}{25}$? Explica.

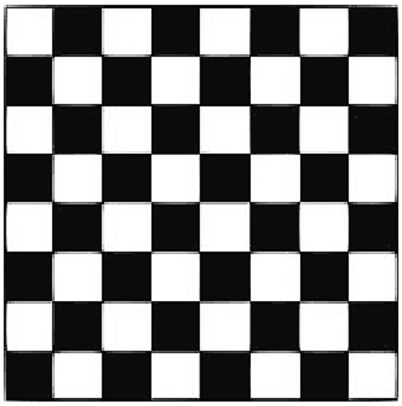
8. ¿Qué número es mayor, $\sqrt{2}$ o $\frac{15}{9}$? Explica.

9. Coloca cada uno de los siguientes números en su ubicación aproximada en la recta numérica:
$\sqrt{25}$, $\sqrt{28}$, $\sqrt{30}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{35}$, y $\sqrt{36}$.



10. Desafío: ¿Qué número es mayor: $\sqrt{5}$ o $\sqrt[3]{11}$?

11. Se está diseñando cierto tablero de ajedrez para que cada cuadrado tenga un área de 3 in^2. ¿Cuál es la longitud de una arista en el pizarrón redondeada a la posición de las décimas? (Un tablero de ajedrez se compone de 64 cuadrados como se muestra).



Resumen de la lección

Encontrar los primeros lugares de la expansión decimal de los números nos permite comparar los números.

Grupo de problemas

1. ¿Qué número es menor, $\sqrt[3]{343}$ o $\sqrt{48}$? Explica.

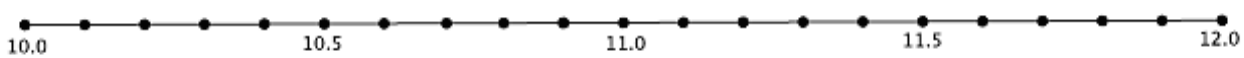
2. ¿Qué número es menor, $\sqrt{100}$ o $\sqrt[3]{1000}$? Explica.

3. ¿Qué número es mayor: $\sqrt{87}$ o $\frac{929}{99}$? Explica.

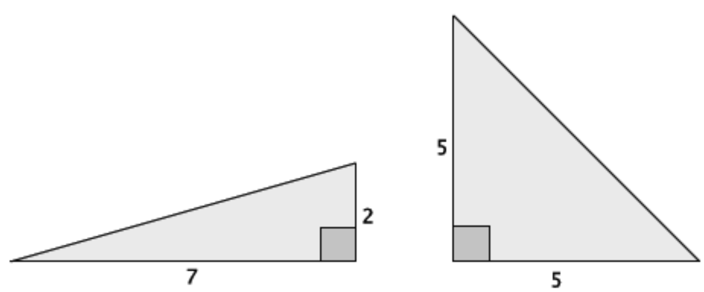
4. ¿Qué número es mayor: $0.\overline{692}$ o $\frac{9}{13}$? Explica.

5. ¿Qué número es mayor: 9.1 o $\sqrt{82}$? Explica.

6. Coloca cada uno de los siguientes números en su ubicación aproximada en la recta numérica: $\sqrt{144}$, $\sqrt[3]{1000}$, $\sqrt{130}$, $\sqrt{110}$, $\sqrt{120}$, $\sqrt{115}$, y $\sqrt{133}$. Explica cómo sabías dónde colocar los números.



7. ¿Cuál de los dos triángulos rectángulos que se muestran a continuación, medidos en unidades, tiene una hipotenusa más larga? Aproximadamente, ¿cuánto más larga?

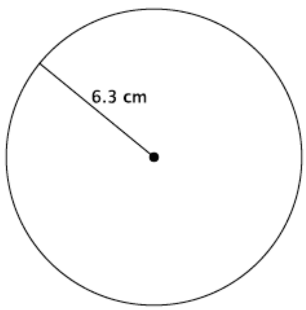


Lección 14: Expansión decimal de π

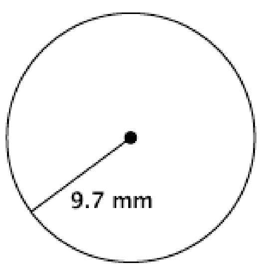
Trabajo en clase

Ejercicio inicial

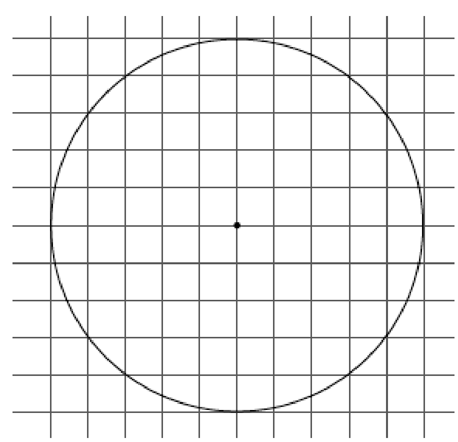
a. Escribe una ecuación numérica para el área A de la figura a continuación.



b. Escribe una ecuación para la circunferencia, C, en el círculo que se muestra.



c. Cada uno de los cuadrados en la cuadrícula tiene un área de $1\ \text{unidad}^2$.



i. Estima el área del círculo que se muestra, contando los cuadrados.

ii. Calcula el área del círculo utilizando un radio de 5 unidades. (Usa 3.14 como una aproximación de π).

Ejercicios 1–4

1. Gerardo y Sara están construyendo una rueda con un radio de 6.5 cm y están tratando de determinar la circunferencia. Gerardo dice: “Porque $6.5 \times 2 \times 3.14 = 40.82$, la circunferencia es 40.82 cm." Sarah dice: “Porque $6.5 \times 2 \times 3.10 = 40.3$ y $6.5 \times 2 \times 3.21 = 41.73$, la circunferencia está en algún lugar entre 40.3 y 41.73." Explica el pensamiento de cada estudiante.

2. Estima el valor del número $(6.12486\ldots)^2$.

3. Estima el valor del número $(9.204107\ldots)^2$.

4. Estima el valor del número $(4.014325\ldots)^2$.

Resumen de la lección

Los números, como π, a menudo se aproximan para calcularlos. Las aproximaciones comunes para π y 3.14 son $\frac{22}{7}$. Se debe entender que el uso de un valor aproximado de un número para los cálculos produce una respuesta que tiene una precisión de solo unos primeros pocos dígitos decimales.

Grupo de problemas

1. Caitlin estima π como $3.10 < \pi < 3.21$. Si utiliza esta aproximación de π para determinar el área de un círculo con un radio de 5 cm, ¿cuál podría ser el área?

2. Myka estima la circunferencia de un círculo con un radio de 4.5 in como 28.44 in. ¿Qué valor aproximado de π utiliza? ¿Es una aproximación aceptable de π? Explica.

3. La longitud de un listón se corta para decorar un tarro cilíndrico de galletas. El listón debe tener la misma longitud que la circunferencia de la caja. Sólo hay suficiente cinta para hacer un corte. Cuando se aproxima π para calcular la circunferencia del tarro, ¿qué número en el intervalo de $3.10 < \pi < 3.21$ se debe utilizar? Explica.

4. Estima el valor del número $(1.86211\ldots)^2$.

5. Estima el valor del número $(5.9035687\ldots)^2$.

6. Estima el valor del número $(12.30791\ldots)^2$.

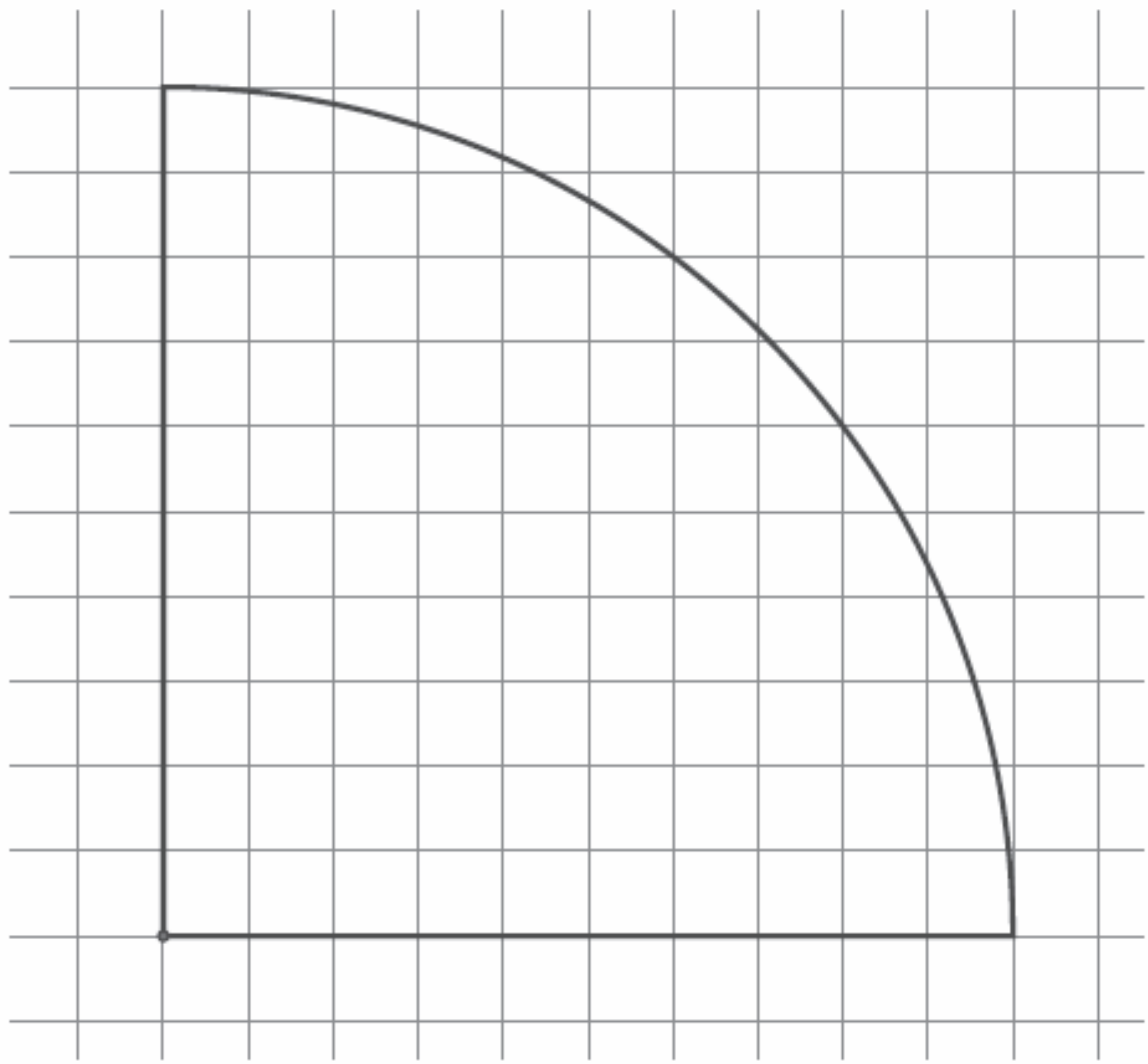
7. Estima el valor del número $(0.6289731\ldots)^2$.

8. Estima el valor del número $(1.112223333\ldots)^2$.

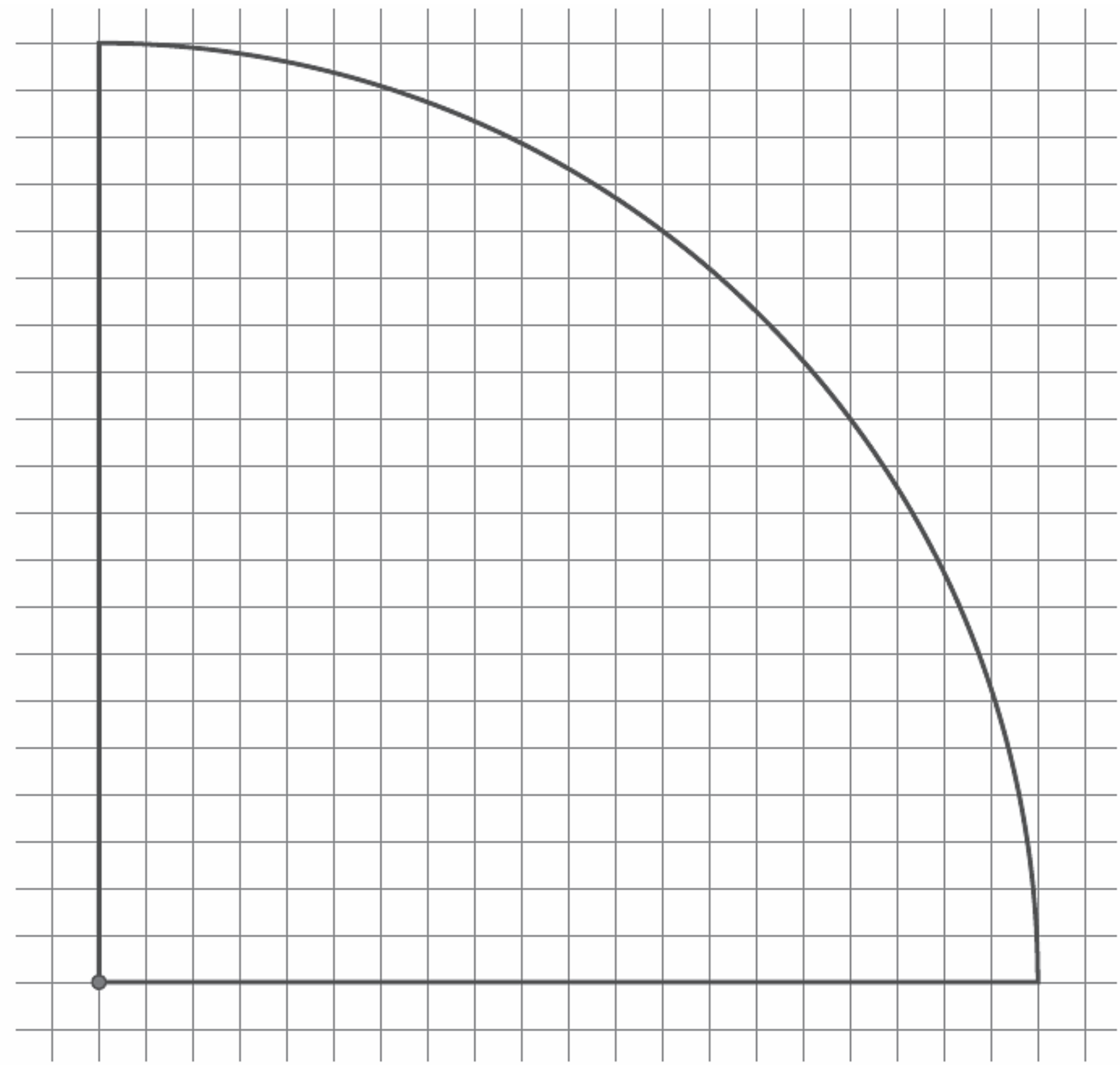
9. ¿Qué número es una mejor estimación para π, $\frac{22}{7}$ o 3.14? Explica.

10. ¿Hasta cuántos dígitos decimales puedes estimar correctamente el valor del número $(4.56789012\ldots)^2$?

Cuadrícula 10 por 10



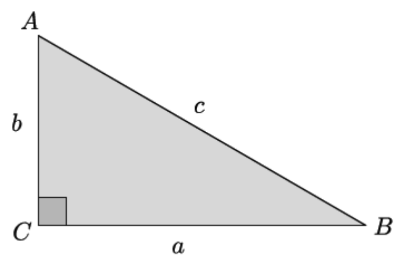
Cuadrícula 20 por 20

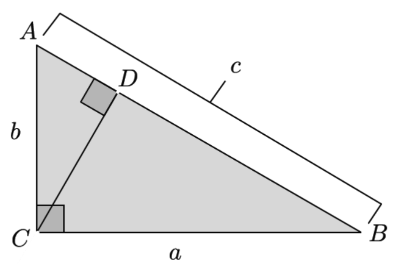


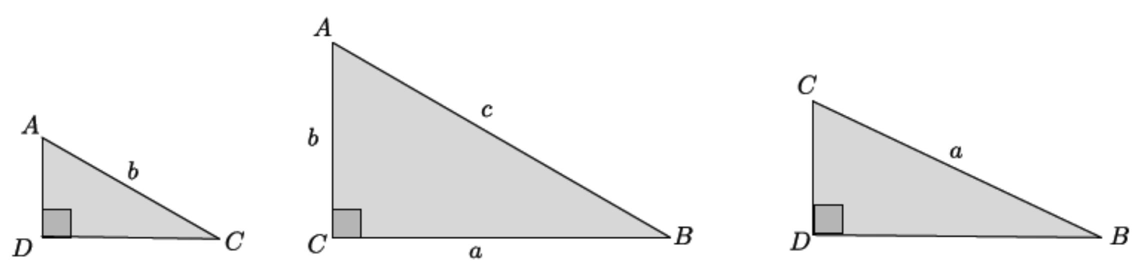
Lección 15: Teorema de Pitágoras, repaso

Trabajo en clase

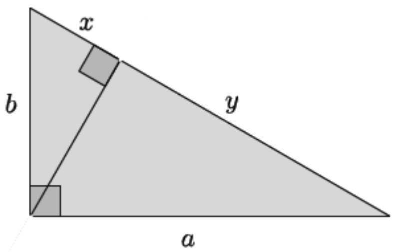
Prueba del teorema de Pitágoras

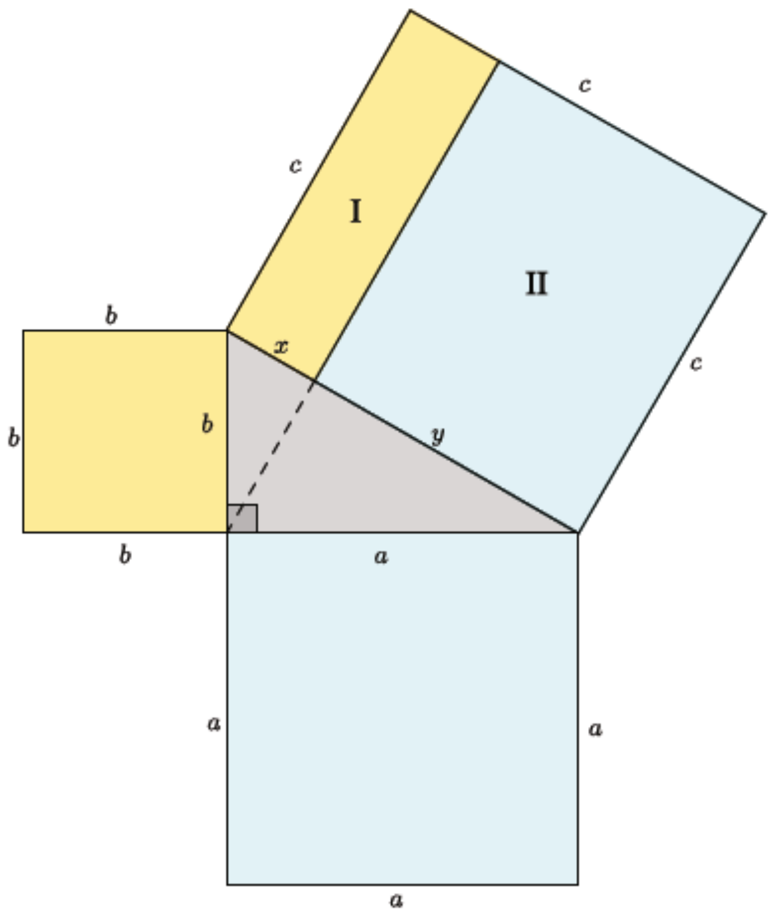






Discusión



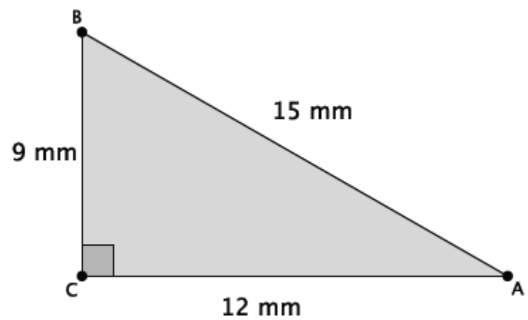


Resumen de la lección

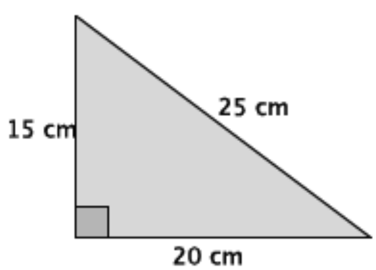
El teorema de Pitágoras se puede demostrar dibujando la altura en el triángulo rectángulo dado e identificando los tres triángulos semejantes. Podemos ver geométricamente cómo el cuadrado grande dibujado en la hipotenusa del triángulo tiene un área al sumar las áreas de los dos cuadrados más pequeños dibujados en los catetos del triángulo rectángulo.

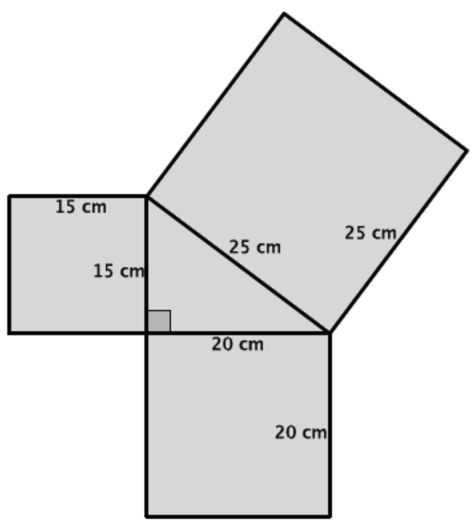
Grupo de problemas

1. Para el triángulo rectángulo que se muestra a continuación, identifica y utiliza los triángulos semejantes para ilustrar el teorema de Pitágoras.

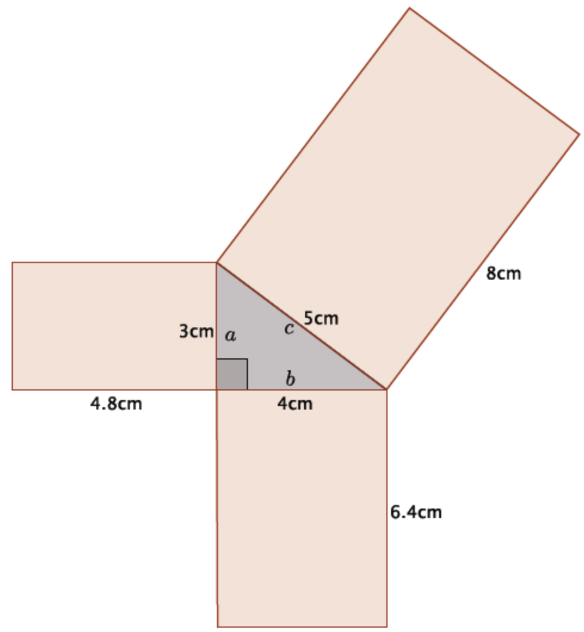


2. Para el triángulo rectángulo que se muestra a continuación, identifica y usa los cuadrados formados por los lados del triángulo para ilustrar el teorema de Pitágoras.

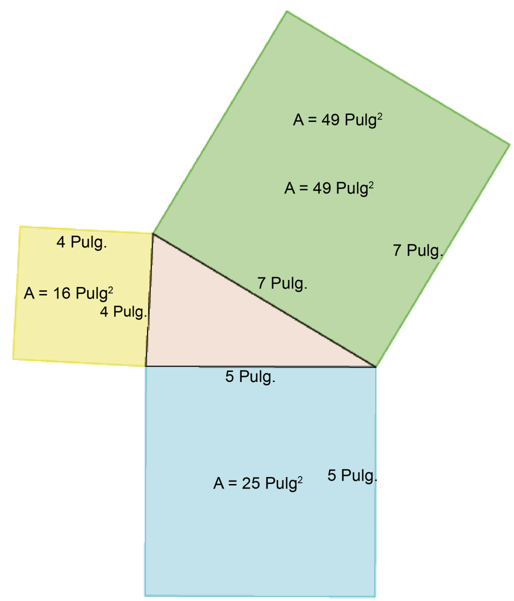




3. Reese afirmó que cualquier figura se puede extraer de los lados de un triángulo rectángulo y que, mientras sean figuras semejantes, entonces la suma de las áreas fuera de los catetos será igual al área fuera de la hipotenusa. Dibujó el diagrama mediante la construcción de rectángulos fuera de cada lado de un triángulo rectángulo conocido. La afirmación de Reese, ¿es correcta para este ejemplo? Con el fin de probar o refutar la afirmación de Reese, primero debes demostrar que los rectángulos son semejantes. Si es así, entonces puedes utilizar los cálculos para demostrar que la suma de las áreas de las figuras fuera de los lados a y b es igual al área de la figura fuera del lado c.



4. Después de aprender la prueba del teorema de Pitágoras utilizando las áreas de cuadrados, José se puso muy contento y trató de explicárselo a su hermano menor. Durante su explicación, se dio cuenta que había hecho algo mal. Ayuda a José a encontrar su error. Explica qué hizo mal.



5. Dibuja un triángulo rectángulo con cuadrados construidos fuera de cada lado para que José pueda utilizarlo la próxima vez que quiera mostrar a su hermano menor la prueba del teorema de Pitágoras.

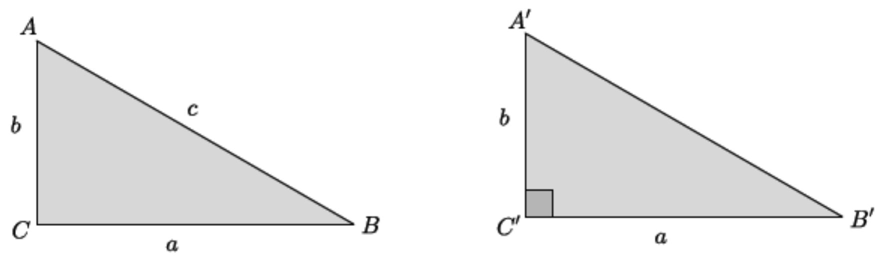
6. Explica el significado del teorema de Pitágoras con tus propias palabras.

7. Dibuja un diagrama que muestre un ejemplo que ilustra el teorema de Pitágoras.

Lección 16: Recíproco del teorema de Pitágoras

Trabajo en clase

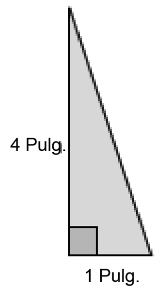
Prueba del recíproco del teorema de Pitágoras



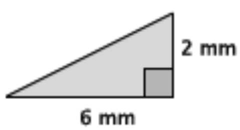
Ejercicios 1–7

1. ¿Es el triángulo con longitudes de los catetos de 3 mi y 8 mi, y una hipotenusa de $\sqrt{73}$ mi de longitud un triángulo rectángulo? Demuestra tu trabajo y responde con una oración completa.

2. ¿Cuál es la longitud del lado que no se conoce del triángulo rectángulo que se muestra a continuación? Demuestra tu trabajo y responde con una oración completa. Proporciona una respuesta exacta y una respuesta aproximada redondeada a la posición de las décimas.



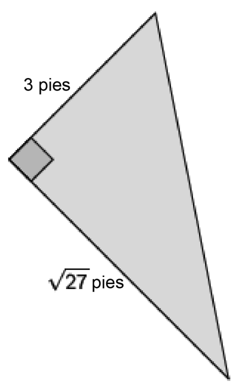
3. ¿Cuál es la longitud del lado que no se conoce del triángulo rectángulo que se muestra a continuación? Demuestra tu trabajo y responde con una oración completa. Proporciona una respuesta exacta y una respuesta aproximada redondeada a la posición de las décimas.



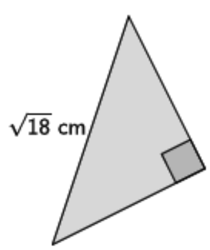
4. ¿Es el triángulo con longitudes de los catetos de 9 in y 9 in, y una hipotenusa de $\sqrt{175}$ in de longitud un triángulo rectángulo? Demuestra tu trabajo y responde con una oración completa.

5. ¿Es el triángulo con longitudes de los catetos de $\sqrt{28}$ cm y 6 cm, y una hipotenusa de 8 cm de longitud un triángulo rectángulo? Demuestra tu trabajo y responde con una oración completa.

6. ¿Cuál es la longitud del lado que no se conoce del triángulo rectángulo que se muestra a continuación? Demuestra tu trabajo y responde con una oración completa.



7. El triángulo que se muestra a continuación es un triángulo rectángulo isósceles. Determina la longitud de los catetos del triángulo. Demuestra tu trabajo y responde con una oración completa.



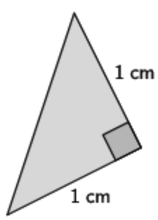
Resumen de la lección

El recíproco del teorema de Pitágoras establece que si un triángulo con longitudes laterales a, b y c satisface $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.

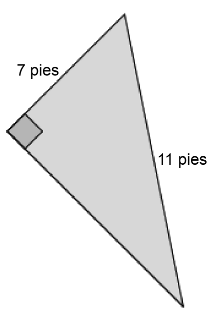
Lo contrario puede probarse utilizando los conceptos relacionados con la congruencia.

Grupo de problemas

1. ¿Cuál es la longitud del lado que no se conoce del triángulo rectángulo que se muestra a continuación? Muestra tu trabajo y responde con una oración completa. Proporciona una respuesta exacta y una respuesta aproximada redondeada a la posición de las décimas.



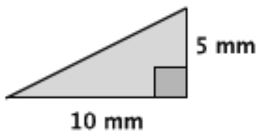
2. ¿Cuál es la longitud del lado que no se conoce del triángulo rectángulo que se muestra a continuación? Muestra tu trabajo y responde con una oración completa. Proporciona una respuesta exacta y una respuesta aproximada redondeada a la posición de las décimas.



3. ¿Es el triángulo con longitudes de los catetos de $\sqrt{3}$ cm y 9 cm, y una hipotenusa de $\sqrt{84}$ cm de longitud un triángulo rectángulo? Muestra tu trabajo y responde con una oración completa.

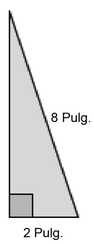
4. ¿Es el triángulo con longitudes de los catetos de $\sqrt{7}$ km y 5 km, y una hipotenusa de $\sqrt{48}$ km de longitud un triángulo rectángulo? Muestra tu trabajo y responde con una oración completa.

5. ¿Cuál es la longitud del lado que no se conoce del triángulo rectángulo que se muestra a continuación? Muestra tu trabajo y responde con una oración completa. Proporciona una respuesta exacta y una respuesta aproximada redondeada a la posición de las décimas.



6. ¿Es el triángulo cuyas longitudes de los catetos son 3 y 6, y cuya hipotenusa tiene $\sqrt{45}$ de longitud un triángulo rectángulo? Muestra tu trabajo y responde con una oración completa.

7. ¿Cuál es la longitud del lado que no se conoce del triángulo rectángulo que se muestra a continuación? Muestra tu trabajo y responde con una oración completa. Proporciona una respuesta exacta y una respuesta aproximada redondeada a la posición de las décimas.



8. ¿Es el triángulo con longitudes de los catetos de 1 y $\sqrt{3}$, y una hipotenusa de 2 de longitud un triángulo rectángulo? Muestra tu trabajo y responde con una oración completa.

9. Corey encontró que la hipotenusa de un triángulo rectángulo con longitudes de los catetos de 2 y 3 es $\sqrt{13}$. Corey afirma que, dado que $\sqrt{13} = 3.61$, al evaluar los dos dígitos decimales, un triángulo con longitudes de los catetos de 2 y 3, y una hipotenusa de 3.61 es un triángulo rectángulo. ¿Tiene razón? Explica.

10. Explica una demostración del teorema de Pitágoras.

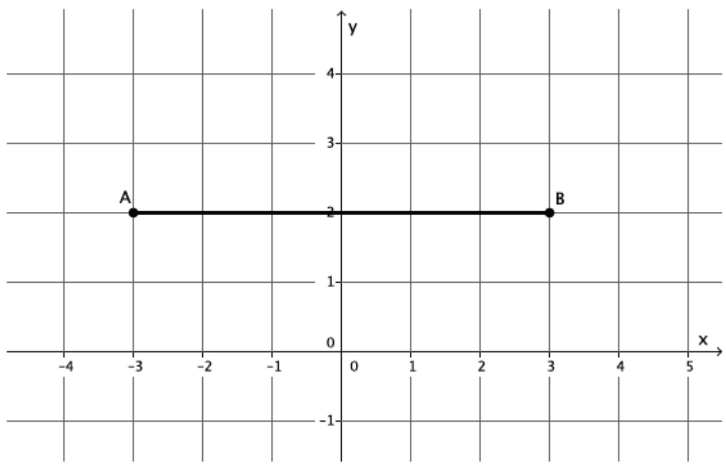
11. Explica una prueba del recíproco del teorema de Pitágoras.

Lección 17: Distancia en el plano cartesiano

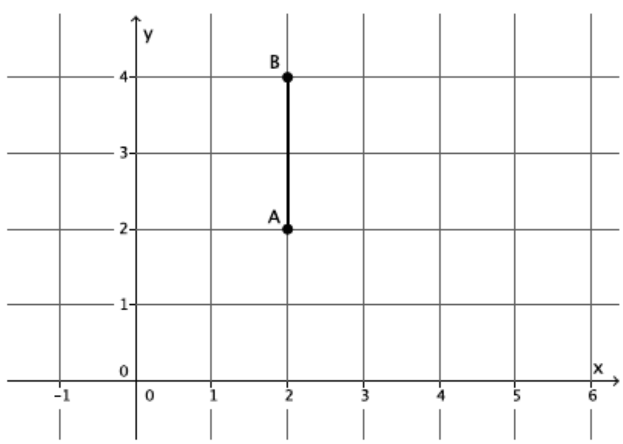
Trabajo en clase

Ejemplo 1

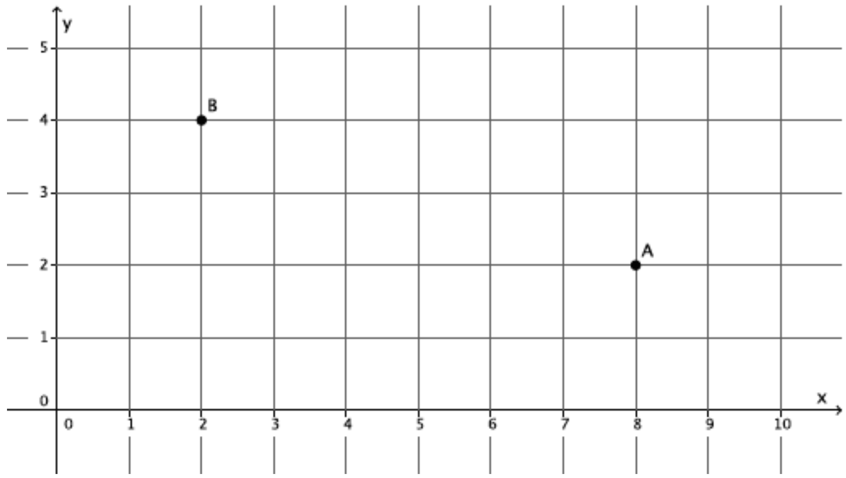
¿Cuál es la distancia entre los dos puntos A y B en el plano cartesiano?



¿Cuál es la distancia entre los dos puntos A y B en el plano cartesiano?

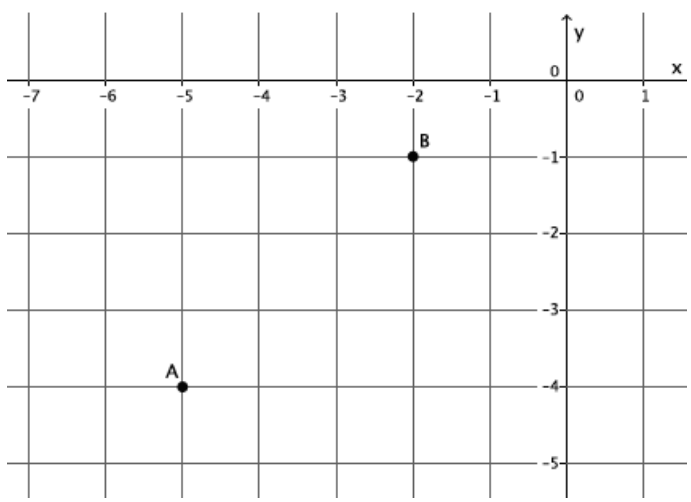


¿Cuál es la distancia entre los dos puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ en el plano cartesiano? Redondea tu respuesta a la posición de las décimas.



Ejemplo 2

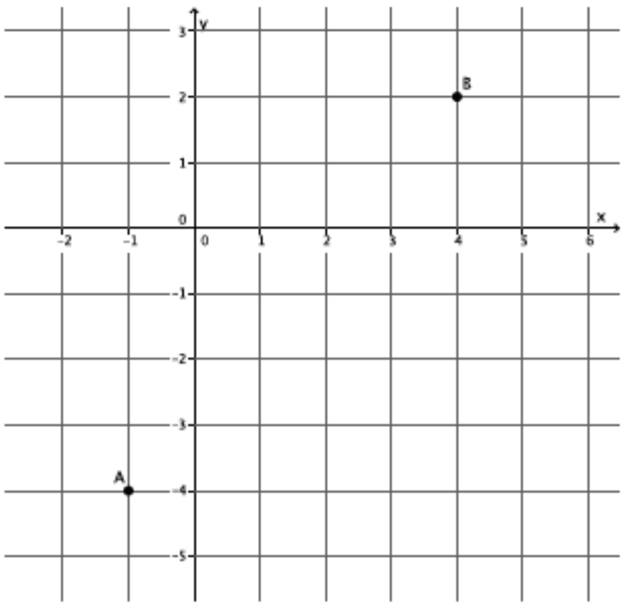
Dados dos puntos A y B en el plano cartesiano, determina la distancia entre ellos. Primero, haz una estimación; después, trata de encontrar una respuesta más precisa. Redondea tu respuesta a las décimas más cercanas.



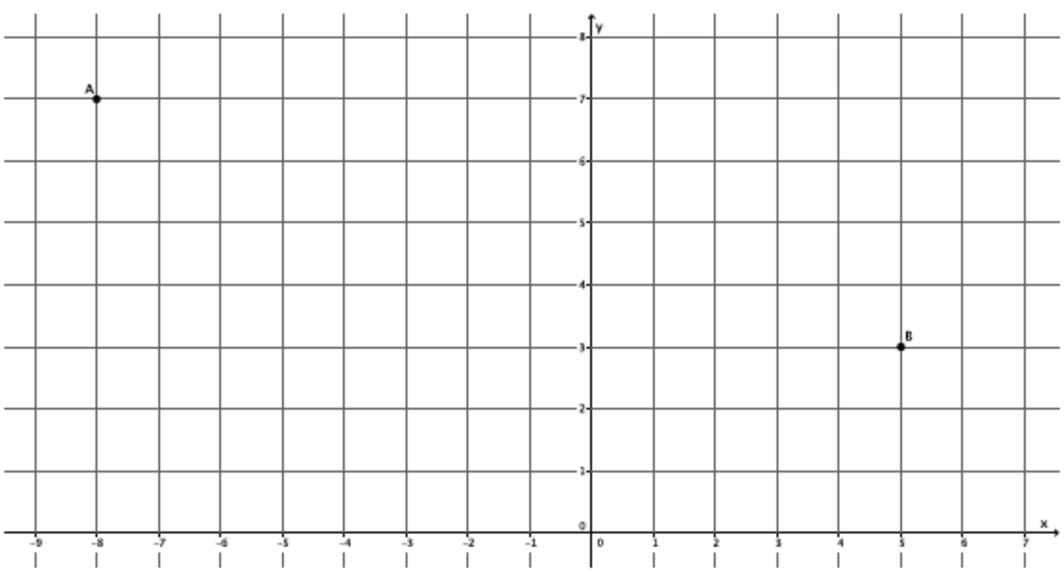
Ejercicios 1–4

Para cada uno de los Ejercicios 1-4, determina la distancia entre los puntos A y B en el plano cartesiano. Redondea tu respuesta a las décimas más cercana.

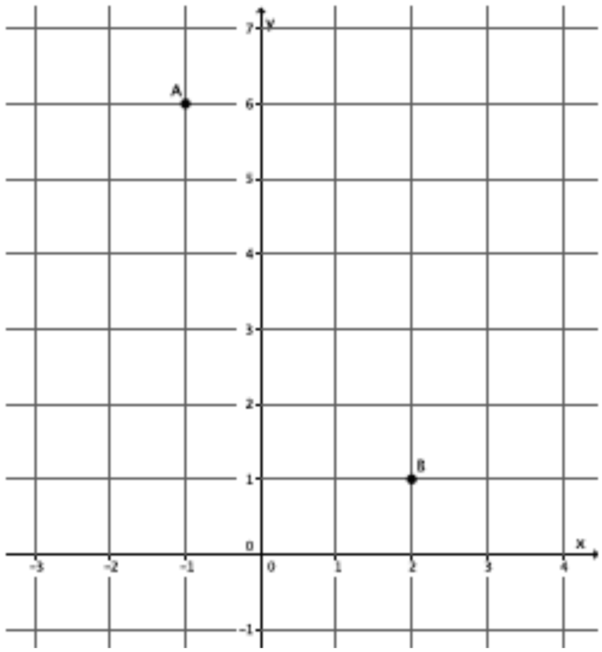
1.



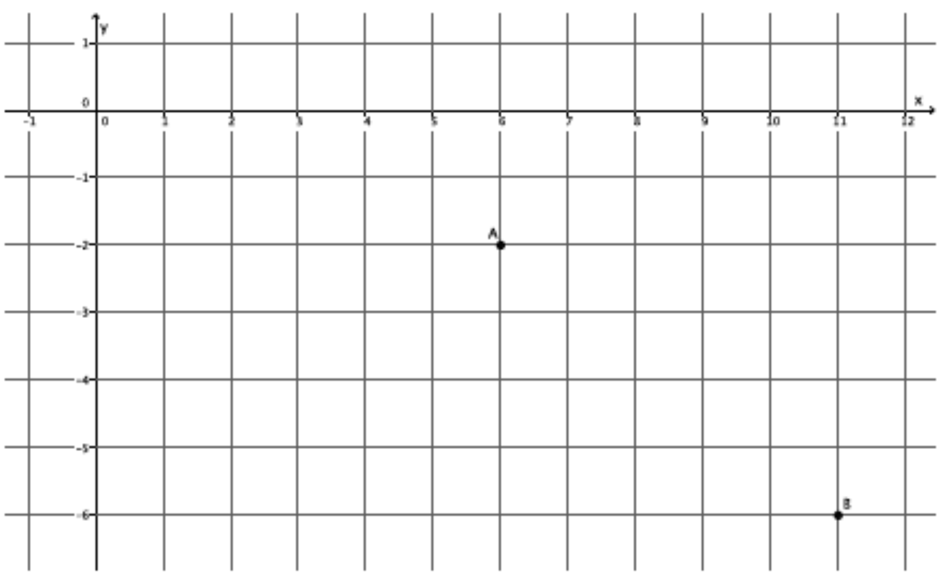
2.



3.

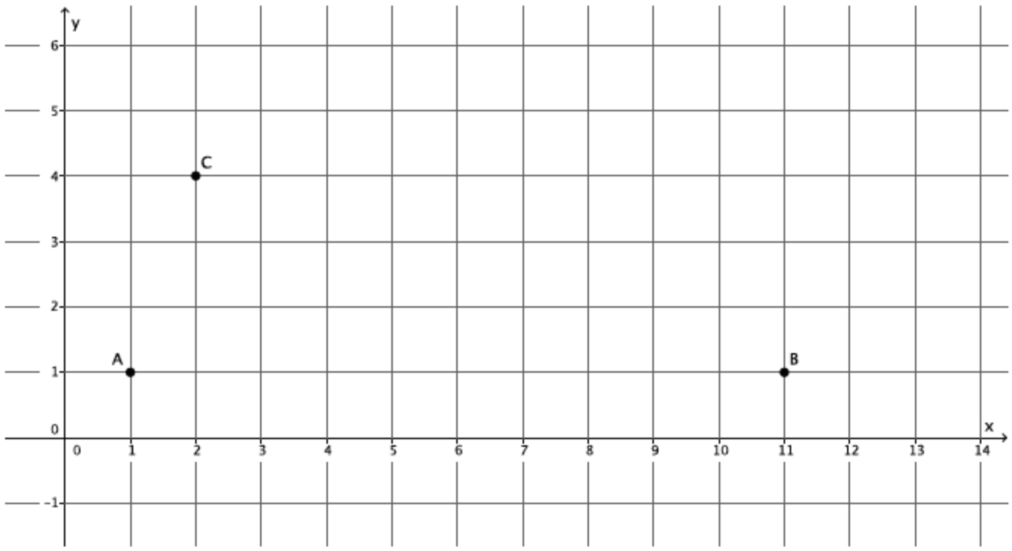

y
x
A
B
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

4.


y
x
A
B
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

Ejemplo 3

¿El triángulo formado por los puntos A, B, C es un triángulo rectángulo?



Resumen de la lección

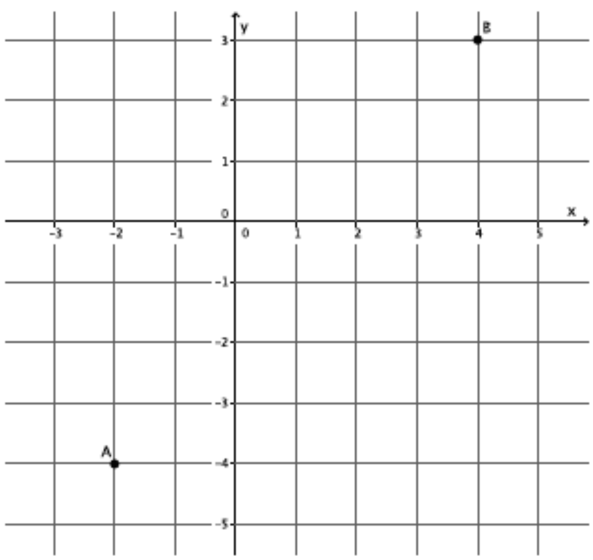
Para determinar la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano, se debe comenzar uniendo los dos puntos. Después, se debe dibujar una recta vertical a través de uno de los puntos y una recta horizontal que pasa por el otro punto. En la intersección de las rectas verticales y horizontales se forma un triángulo rectángulo al que se puede aplicar el teorema de Pitágoras.

Para comprobar si un triángulo es un triángulo rectángulo, se debe utilizar el recíproco del teorema de Pitágoras.

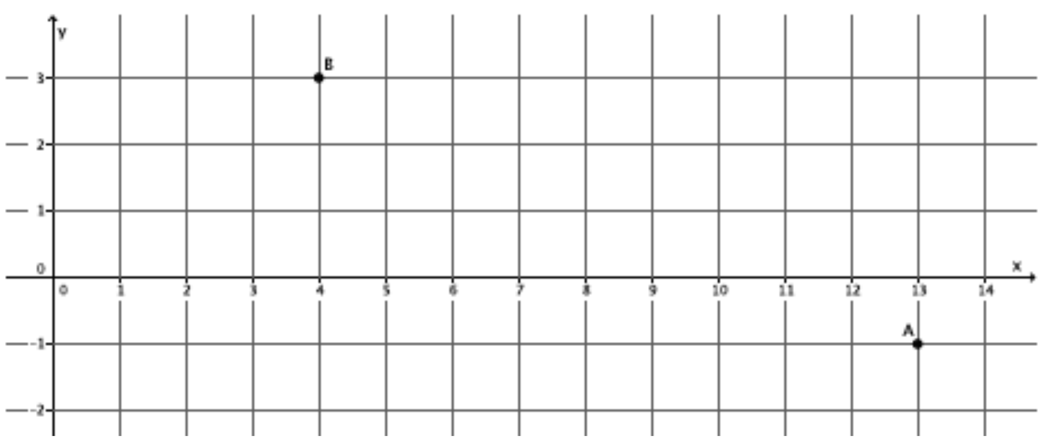
Grupo de problemas

Para cada uno de los Problemas 1 - 4, determina la distancia entre los puntos A y B en el plano cartesiano. Redondea tu respuesta a las décimas más cercanas.

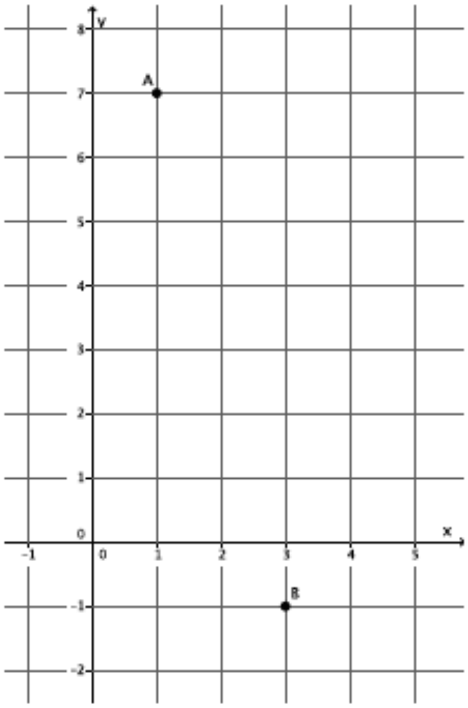
1.



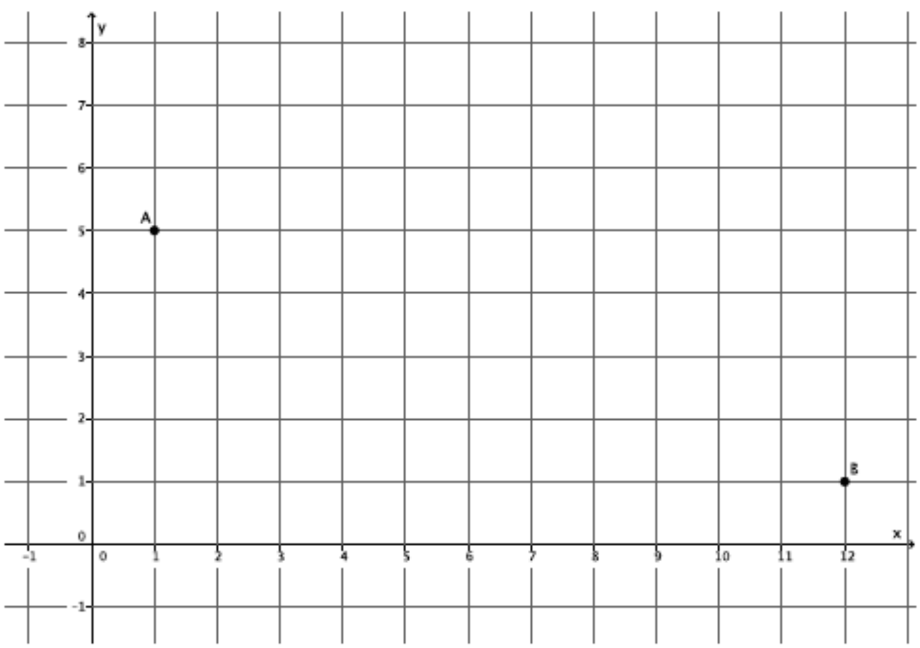
2.



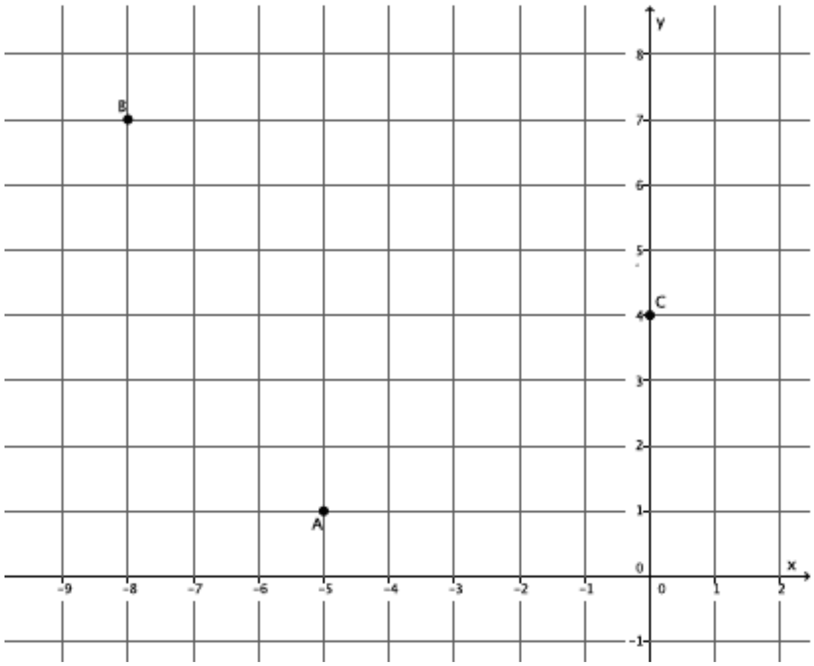
3.


y
x
A
B
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-1
0
1
2
3
4
5

4.


y
x
A
B
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

5. ¿El triángulo formado por los puntos A, B, C es un triángulo rectángulo?

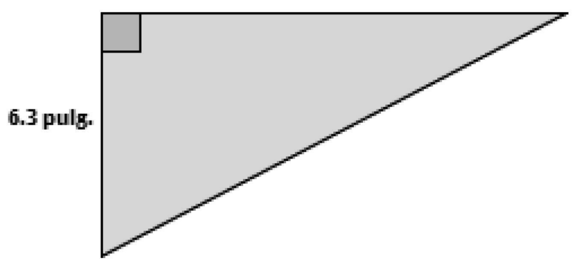


Lección 18: Aplicaciones del Teorema de Pitágoras

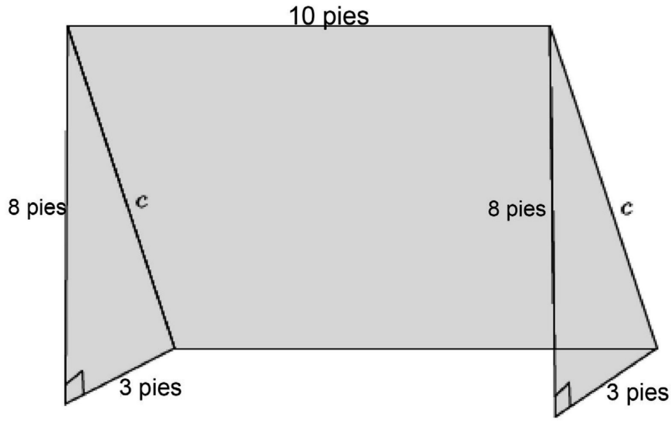
Trabajo en clase

Ejercicios

1. El área del triángulo rectángulo que se muestra a continuación es 26.46 in^2. ¿Cuál es el perímetro del triángulo rectángulo? Redondea tu respuesta a la décima más cercana.



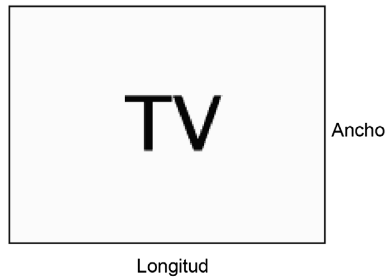
2. El siguiente diagrama es una representación de una portería de fútbol.



a. Determina la longitud de la barra, c, que sería necesaria para proporcionar la estructura de la portería. Redondea tu respuesta a la décima más cercana.

b. ¿Cuánta red (en pies cuadrados) se necesita para cubrir toda la portería?

3. La relación típica entre la longitud y el ancho que se utiliza para producir televisiones es $4: 3$..



Un televisor de 20 pulgadas de longitud y 15 pulgadas de ancho, por ejemplo, tiene lados en una relación de $4: 3$; un televisor con $4x$ pulgadas de longitud y $3x$ pulgadas de ancho para cualquier número x.

a. ¿Cuál es el tamaño anunciado de un televisor de 20 pulgadas de longitud y 15 pulgadas de ancho?

b. Le acaban de regalar un televisor de 42" a tu familia. ¿Cuáles son las medidas de longitud y ancho del televisor?

c. Comprueba que las dimensiones que pusiste en la parte (b) sean correctas usando el teorema de Pitágoras.

d. La mesa de tu televisor tiene 30" de longitud. ¿Cabrá el nuevo televisor en la mesa? Explica.

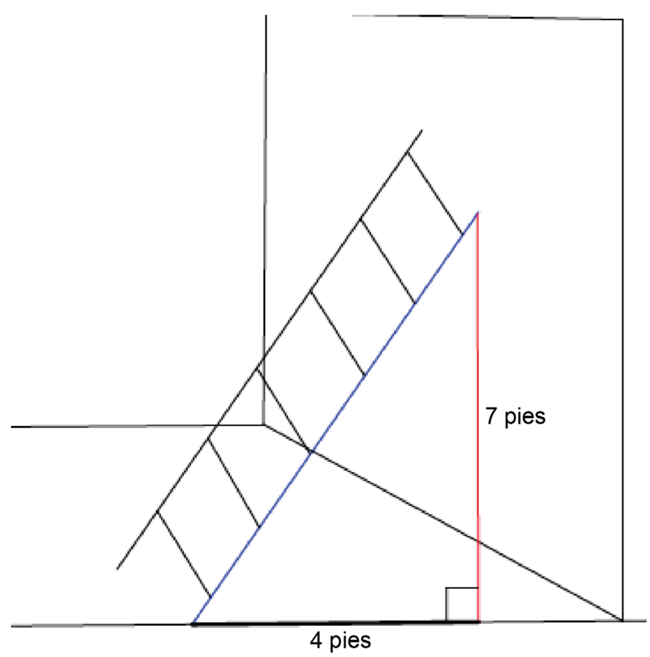
4. Determina la distancia entre los siguientes pares de puntos. Redondea tu respuesta a la décima más cercana. Utiliza papel cuadriculado si fuera necesario.

a. $(7, 4)$ y $(-3, -2)$

b. $(-5, 2)$ y $(3, 6)$

c. Desafío: (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Explica tu respuesta.

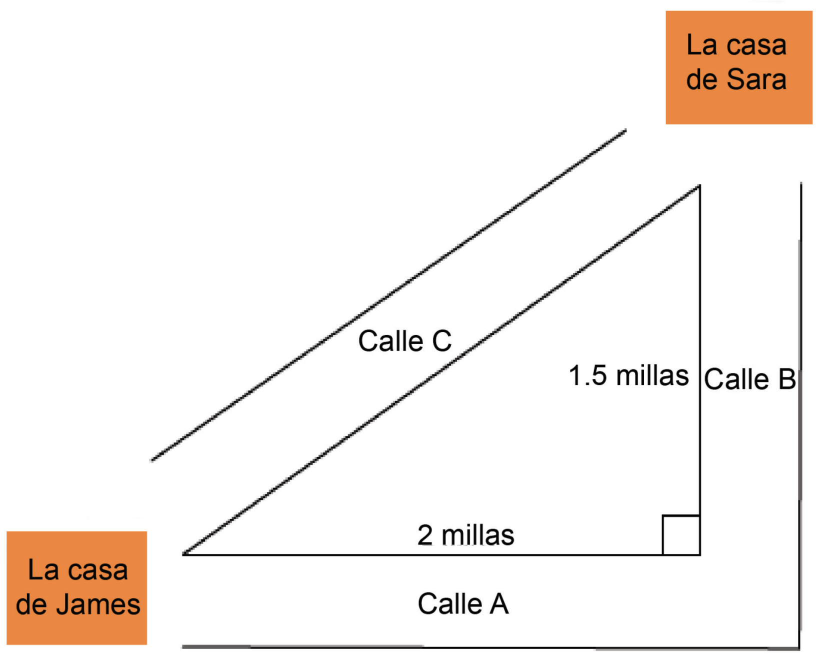
5. ¿Una escalera de qué longitud se necesita para alcanzar una altura de 7 pies en la pared cuando la base de la escalera está a 4 pies de la pared? Redondea tu respuesta a la décima más cercana.



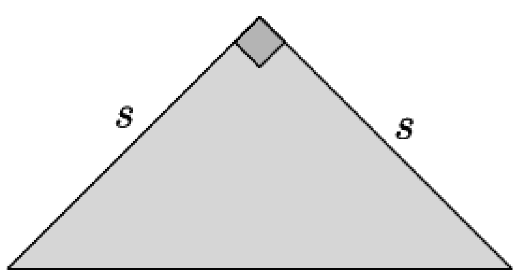
Grupo de problemas

1. Se anuncia la venta de un televisor de $70"$ en una tienda local. ¿Cuál es la longitud y el ancho del televisor?

2. Hay dos caminos que se pueden utilizar para ir de la casa de Sarah a la casa de James. Una forma es tomar la calle C y, con la otra forma, tienes que usarla calle A y la calle B. ¿Cuánto más corto es el camino directo por la calle C?

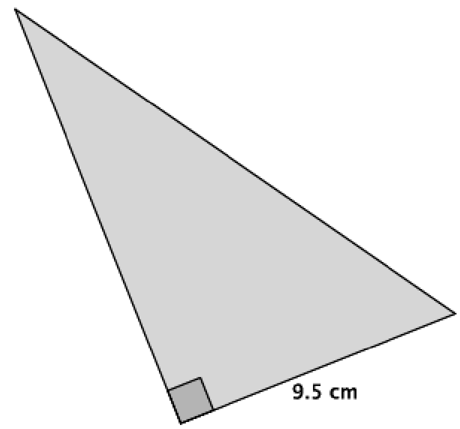


3. Un triángulo rectángulo isósceles hace referencia a un triángulo rectángulo con la misma longitud de los catetos, s, como se muestra a continuación.



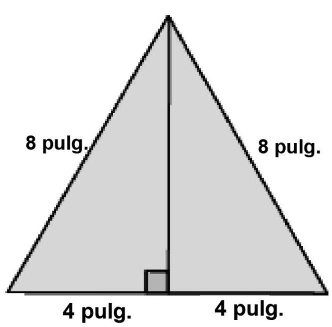
¿Cuál es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles con una longitud de cateto de 9 cm? Escribe una respuesta exacta usando una raíz cuadrada y una respuesta aproximada redondeada a las décimas.

4. El área del triángulo rectángulo que se muestra a la derecha es $66.5\ \text{cm}^2$.
   a. ¿Cuál es la altura del triángulo?
   b. ¿Cuál es el perímetro del triángulo rectángulo? Redondea tu respuesta a la décima más cercana.



5. ¿Cuál es la distancia entre puntos $(\mathbf{1}, \mathbf{9})$ y $(-\mathbf{4}, -\mathbf{1})$? Redondea tu respuesta a la décima más cercana.

6. Un triángulo equilátero se muestra a continuación. Determina el área del triángulo. Redondea tu respuesta a la décima más cercana.



Lección 19: Conos y esferas

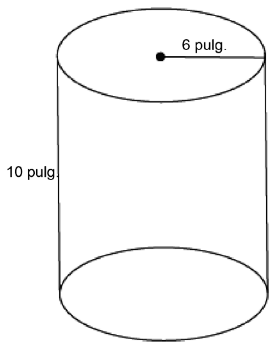
Trabajo en clase

Ejercicios 1–2

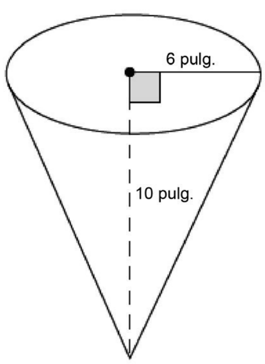
Nota: Las figuras no están dibujadas a escala.

1. Determina el volumen de cada figura.

   a. Escribe una expresión que muestre el volumen en términos del área de la base, B, y la altura de la figura. Explica el significado de la expresión y, después, utilízala para determinar el volumen de la figura.

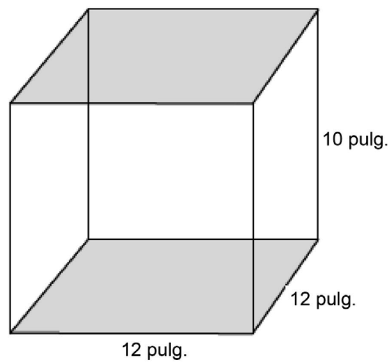


   b. Escribe una expresión que muestre el volumen en términos del área de la base, B, y la altura de la figura. Explica el significado de la expresión y, después, utilízala para determinar el volumen de la figura.

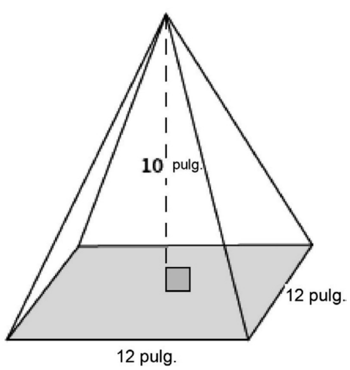


2.

a. Escribe una expresión que muestre el volumen en términos del área de la base, B, y la altura de la figura. Explica el significado de la expresión y, después, utilízala para determinar el volumen de la figura.

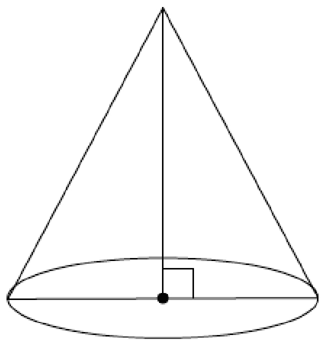


b. El volumen de la pirámide cuadrada que se muestra a continuación es 480 in^3. ¿Cuál podría ser una suposición razonable para la fórmula de volumen de una pirámide? ¿Qué sugiere tu conjetura en particular?



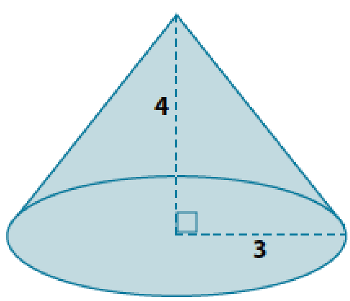
Ejemplo 1

Indica tantos datos como sea posible acerca de un cono.

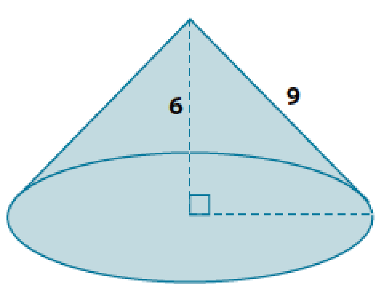


Ejercicios 3–10

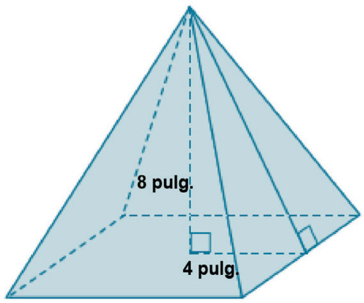
3. ¿Cuál es la longitud lateral (altura de inclinación) del cono que se muestra a continuación?



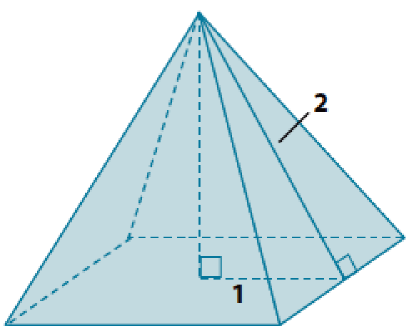
4. Determina el volumen exacto del cono que se muestra a continuación.



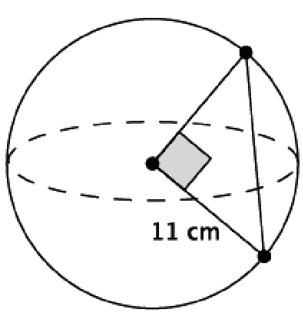
5. ¿Cuál es la longitud lateral (altura de inclinación) de la pirámide que se muestra a continuación? Brinda una respuesta con una raíz cuadrada exacta y una respuesta aproximada redondeada al lugar de las décimas.



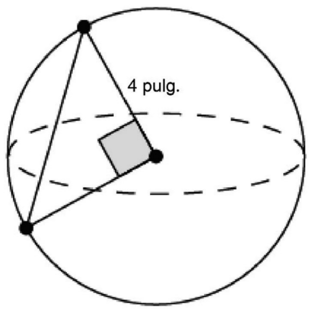
6. Determina el volumen de la pirámide cuadrada que se muestra a continuación. Brinda una respuesta exacta usando una raíz cuadrada.



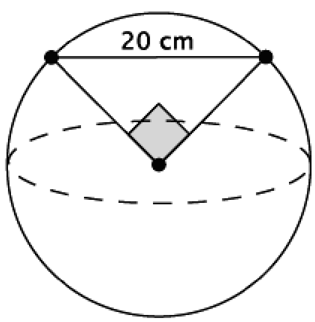
7. ¿Cuál es la longitud de la cuerda de la esfera que se muestra a continuación? Brinda una respuesta exacta usando una raíz cuadrada.



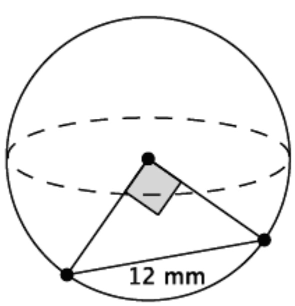
8. ¿Cuál es la longitud de la cuerda de la esfera que se muestra a continuación? Brinda una respuesta exacta usando una raíz cuadrada.



9. ¿Cuál es el volumen de la esfera que se muestra a continuación? Brinda una respuesta exacta usando una raíz cuadrada.



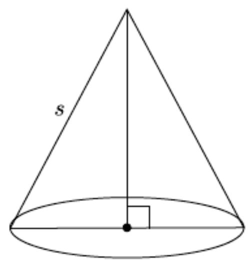
10. ¿Cuál es el volumen de la esfera que se muestra a continuación? Brinda una respuesta exacta usando una raíz cuadrada.



Resumen de la lección

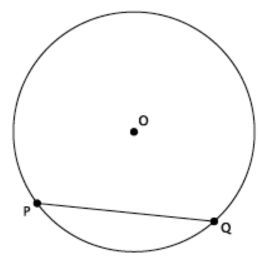
La fórmula del volumen de una pirámide cuadrangular recta es $V = \frac{1}{3}Bh$, donde B es el área de la base cuadrada.

La longitud lateral de un cono, a veces referida como altura de inclinación, es el lado s, que se muestra en el siguiente diagrama.



Dada la longitud lateral y la longitud del radio, el teorema de Pitágoras se puede utilizar para determinar la altura del cono.

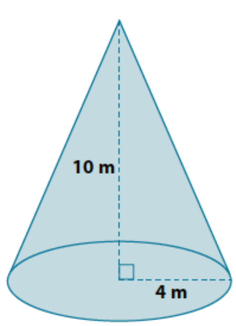
Sea O el centro de un círculo y P y Q los dos puntos de la circunferencia; entonces, $\overline{PQ}$ se llama cuerda del círculo.



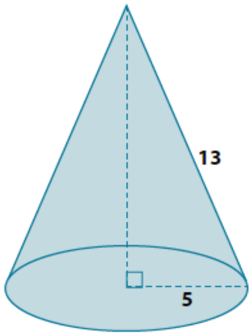
Los segmentos OP y OQ son iguales en longitud porque ambos representan el radio del círculo. Si el ángulo formado por POQ es un ángulo recto, entonces el teorema de Pitágoras se puede utilizar para determinar la longitud del radio cuando se da la longitud de la cuerda o la longitud de la cuerda se puede determinar si se da la longitud del radio.

Grupo de problemas

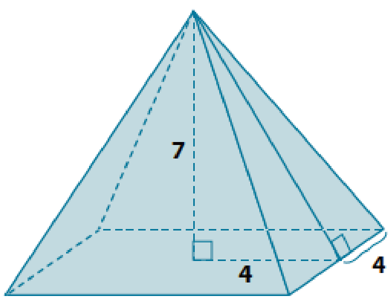
1. ¿Cuál es la longitud lateral (altura de inclinación) del cono que se muestra a continuación? Brinda una respuesta aproximada redondeada al lugar de las décimas.



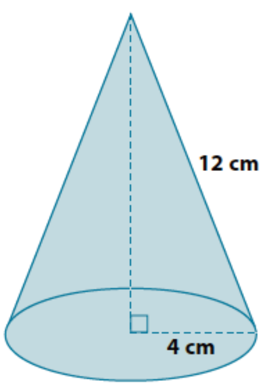
2. ¿Cuál es el volumen del cono que se muestra a continuación? Brinda una respuesta exacta.



3. Determina el volumen y el área superficial de la pirámide cuadrada que se muestra a continuación. Brinda respuestas exactas.



4. Alejandra calcula el volumen del cono que se muestra a continuación como $64\pi\ \text{cm}^3$. Su trabajo se muestra a continuación. ¿Está en lo correcto? Si no es así, explica qué hizo mal y calcula el volumen correcto del cono. Brinda una respuesta exacta.



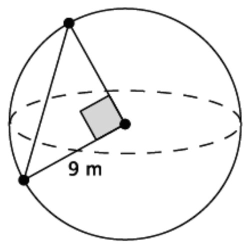
$$V = \frac{1}{3}\pi(4)^2(12)$$

$$= \frac{(16)(12)\pi}{3}$$

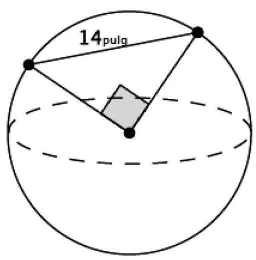
$$= 64\pi$$

El volumen del cono es $64\pi\ \text{cm}^3$.

5. ¿Cuál es la longitud de la cuerda de la esfera que se muestra a continuación? Brinda una respuesta exacta usando una raíz cuadrada.



6. ¿Cuál es el volumen de la esfera que se muestra a continuación? Brinda una respuesta exacta usando una raíz cuadrada.



Lección 20: Troncos de conos

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

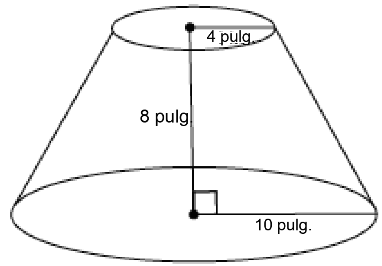
Examina la cubeta a continuación. Tiene una altura de 9 pulgadas y un radio en la parte superior de 4 pulgadas.

a. Describe la forma de la cubeta. ¿A qué es similar?

b. Calcula el volumen de la cubeta.

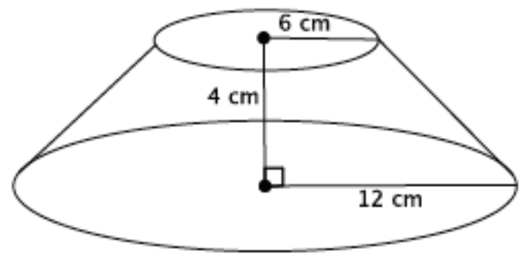
Ejemplo 1

Determina el volumen del tronco de cono que se muestra a continuación.



Ejercicios 1–5

1. Encuentra el volumen del tronco de cono.



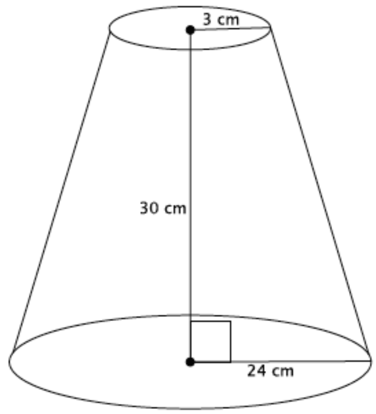
a. Escribe una proporción que te permitiría determinar la altura del cono que se ha quitado. Explica qué representa cada parte de la proporción.

b. Resuelve tu proporción para determinar la altura del cono que se ha quitado.

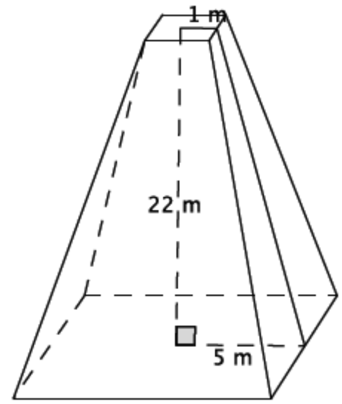
c. Escribe una expresión que pueda ser utilizada para determinar el volumen del tronco de cono. Explica qué representa cada parte de la expresión.

d. Calcula el volumen del tronco de cono.

2. Encuentra el volumen del tronco de cono.



3. Encuentra el volumen del tronco de la pirámide con una base cuadrada.



a. Escribe una proporción que te permita determinar la altura del cono que se ha quitado. Explica qué representa cada parte de la ecuación.

b. Resuelve tu proporción para determinar la altura de la pirámide que se ha quitado.

c. Escribe una expresión que pueda ser utilizada para determinar el volumen del tronco de la pirámide. Explica qué representa cada parte de la expresión.

d. Calcula el volumen del tronco de la pirámide.

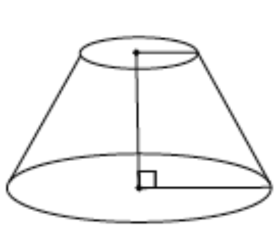
4. Una manga pastelera es una herramienta utilizada para decorar pasteles y bizcochos. Las mangas pasteleras toman la forma de un tronco de cono cuando se llenan con la cobertura. ¿Cuál es el volumen de una manga pastelera con una altura de 6 pulgadas, un radio grande de 2 pulgadas y un radio pequeño de 0.5 pulgadas?

5. Explica con tus propias palabras qué es un tronco de cono y cómo determinas su volumen.

Resumen de la lección

Un tronco de cono o pirámide es el sólido obtenido mediante la elimanción de la parte superior de un cono o de una pirámide en un plano paralelo a su base. A continuación, a la izquierda, se muestra un tronco de cono. A la derecha, se muestra un tronco de cono con la porción superior todavía unida.

Tronco de cono:

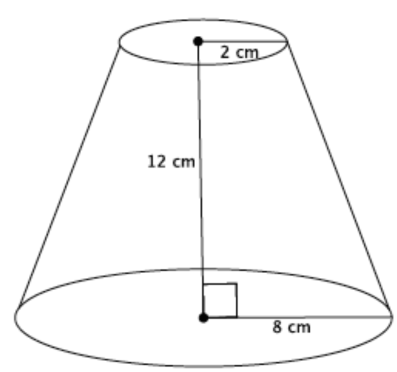


Tronco de cono con la porción superior unida:

Para determinar el volumen de un tronco de cono, primero debes determinar la altura de la parte del cono que se ha eliminado usando las proporciones que representan los lados correspondientes de los triángulos rectángulos. Después, determina el volumen de la parte del cono que se ha eliminado y el volumen del tronco de cono con la parte superior unida. Finalmente, resta el volumen del cono que representa la parte que se ha eliminado del cono completo. La diferencia representa el volumen del tronco de cono.

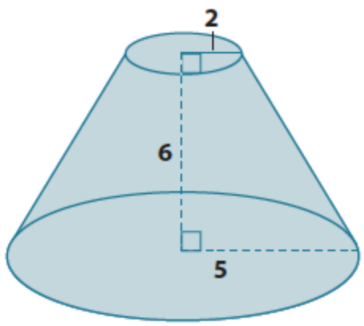
Gráficamente,

Grupo de problemas

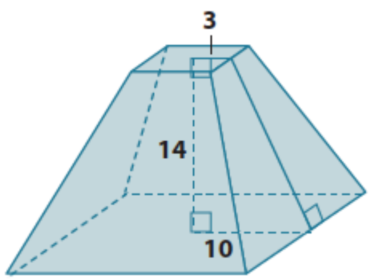


1. Encuentra el volumen del tronco de cono.
   a. Escribe una proporción que te permita determinar la altura del cono que se ha quitado. Explica qué representa cada parte de la proporción.
   b. Resuelve tu proporción para determinar la altura del cono que se ha quitado.
   c. Muestra un hecho acerca el volumen del tronco de cono usando una expresión. Explica qué representa cada parte de la expresión.
   d. Calcula el volumen del tronco de cono.

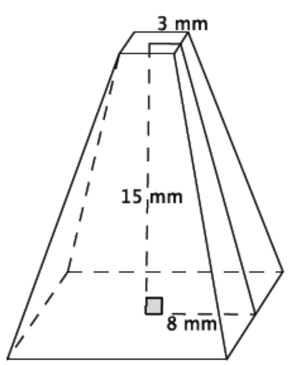
2. Encuentra el volumen del tronco de cono.



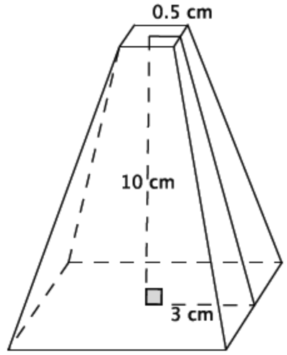
3. Encuentra el volumen del tronco de la pirámide con base cuadrada.



4. Encuentra el volumen del tronco de la pirámide con base cuadrada. Nota: 3 mm es la distancia desde el centro hasta la arista del cuadrado en la parte superior de la figura.

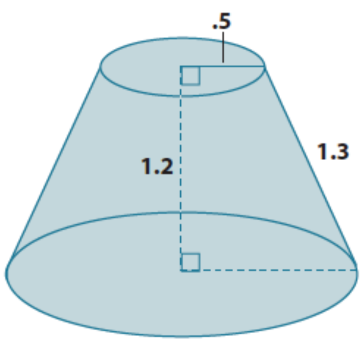


5. Encuentra el volumen del tronco de la pirámide con base cuadrada. Nota: 0.5 cm es la distancia desde el centro hasta la arista del cuadrado en la parte superior de la figura.



6. Explica cómo hallar el volumen de un tronco de cono.

7. Desafío: Encuentra el volumen del tronco de cono.



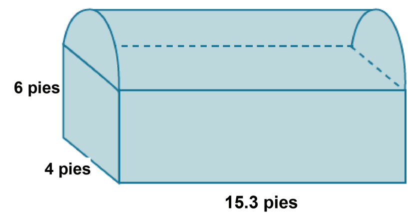
Lección 21: Volumen de sólidos geométricos compuestos

Trabajo en clase

Ejercicios 1–4

1.

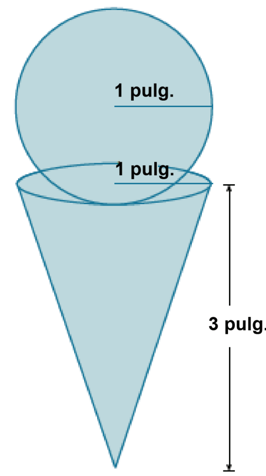
a. Escribe una expresión que se pueda utilizar para encontrar el volumen del arcón que se muestra a continuación. Explica qué representa cada parte de tu expresión. (Supón que los extremos de la parte superior del arcón son semicirculares).



b. ¿Cuál es el volumen aproximado del arcón que se muestra arriba? Usa 3.14 como aproximación de π. Redondea tu respuesta final al lugar de las décimas.

2.

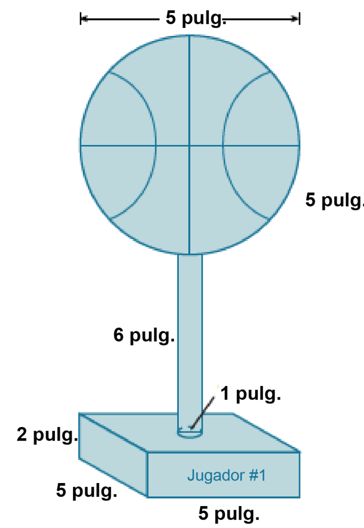
a. Escribe una expresión para calcular el volumen de la figura, un cono y una bola de helado, que se muestra a continuación. Explica qué representa cada parte de tu expresión. (Supón que la esfera toca la base del cono).



b. Suponiendo que cada parte del cono puede ser llenado con helado, ¿cuál es el volumen exacto y aproximado del cono y la bola de helado? (Hay que recordar que las respuestas exactas se dejan en términos de π y que las respuestas aproximadas utilizan 3.14 para π). Redondea tu respuesta aproximada a las centésimas.

3.

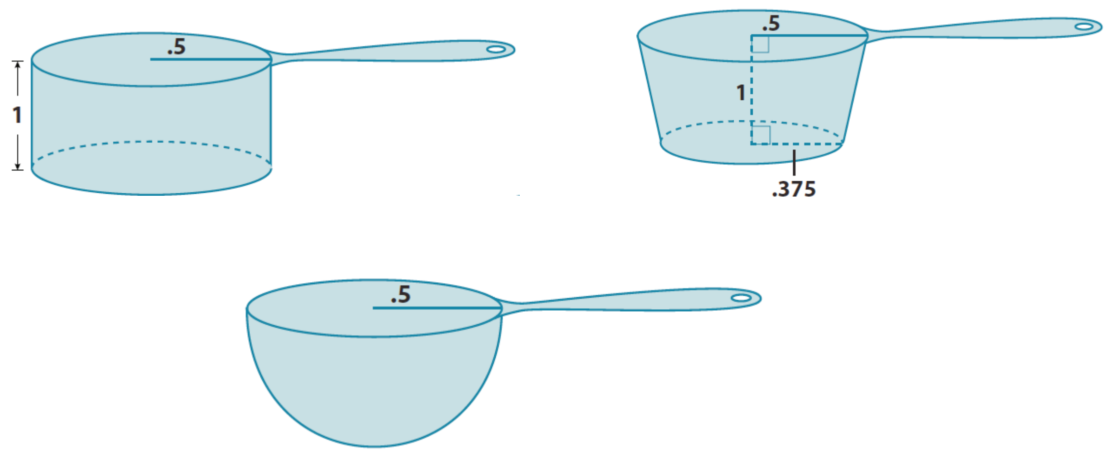
a. Escribe una expresión para calcular el volumen de la figura que se muestra a continuación. Explica qué representa cada parte de tu expresión.



b. Cada parte del trofeo que se muestra es sólida y está hecha de plata. ¿Cuánta plata se utiliza para producir un trofeo? Brinda una respuesta exacta y otra aproximada redondeada a las centésimas.

4. Utiliza el diagrama de cucharas a continuación para responder las partes (a) y (b).

   a. Ordena las cucharas de menor a mayor en términos de sus volúmenes. Cada cuchara se mide en pulgadas. (Supón que la tercera cuchara es semiesférica).



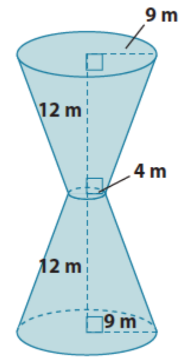
b. ¿Cuántas cucharadas serían necesarias para añadir media taza de azúcar en una mezcla para una magdalena? (Media taza es aproximadamente 7 in^3). Redondea tu respuesta al número entero de cucharas.

Resumen de la lección

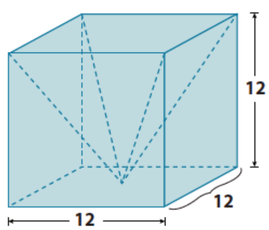
Los sólidos geométricos compuestos son figuras que incluyen más de un sólido. Los volúmenes de los sólidos geométricos compuestos se pueden sumar, siempre y cuando ninguna parte de los sólidos se superponga. Es decir, que se toquen solamente en sus límites.

Grupo de problemas

1. ¿Qué volumen de arena se necesita para llenar completamente el reloj de arena que se muestra a continuación? Nota: 12 m es la altura del tronco de cono, no la longitud lateral del cono.

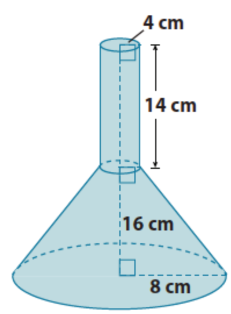


2.
   a. Escribe una expresión para encontrar el volumen del prisma con la porción eliminada de la pirámide. Explica qué representa cada parte de tu expresión.

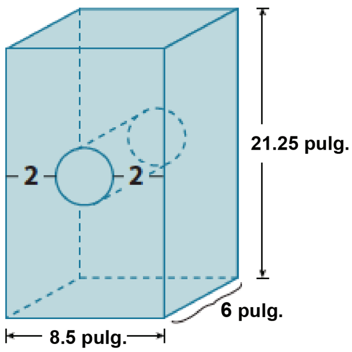


   b. ¿Cuál es el volumen del prisma que se muestra arriba con la porción eliminada de la pirámide?

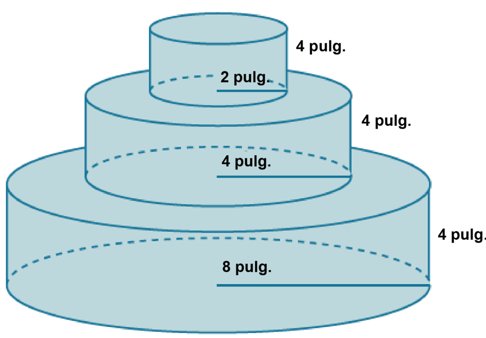
3.
   a. Escribe una expresión para encontrar el volumen del embudo que se muestra a la derecha. Explica qué representa cada parte de tu expresión.
   b. Determina el volumen exacto del embudo.



4. ¿Cuál es el volumen aproximado del prisma rectangular con un orificio cilíndrico como el que se muestra a continuación? Usa 3.14 para π. Redondea tu respuesta a las décimas más cercanas.



5. Se está realizando un pastel en capas para celebrar el final del año escolar. ¿Cuál es el volumen total exacto del pastel que se muestra a continuación?

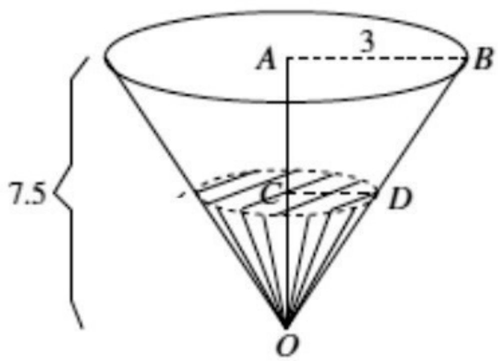


Lección 22: Tasa de cambio promedio

Trabajo en clase

Ejercicio

La altura de un contenedor en forma de un cono circular es 7.5 ft y el radio de su base es 3 ft, tal como se muestra. ¿Cuál es el volumen total del cono?

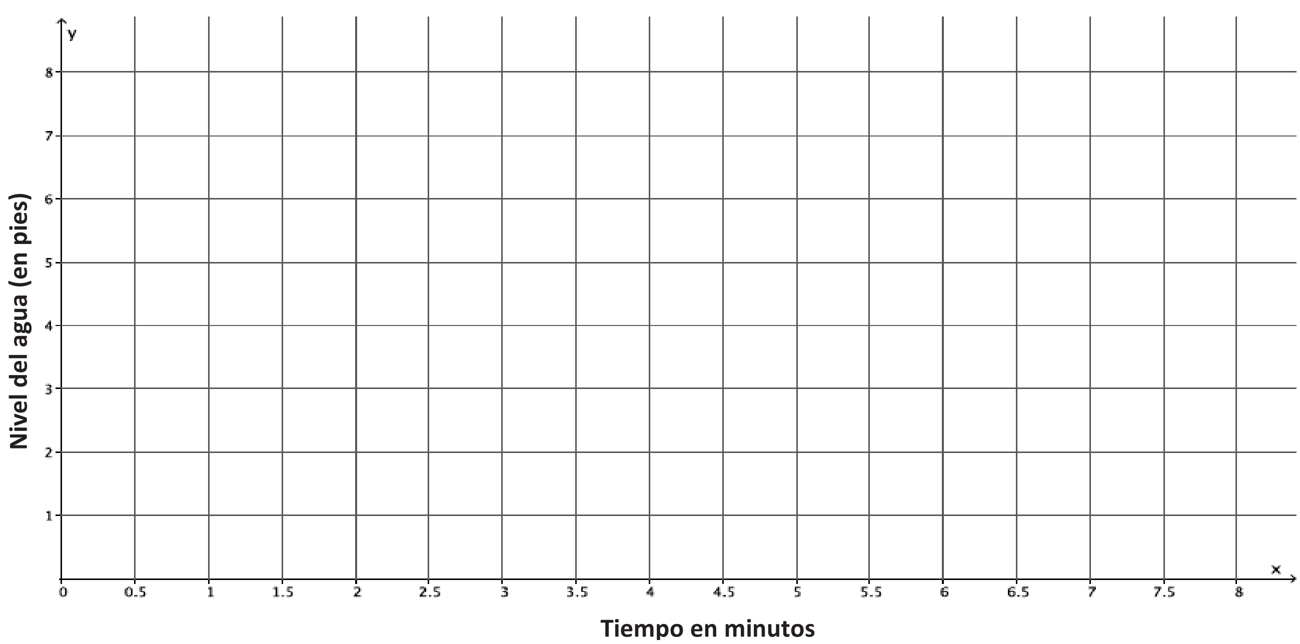


Tiempo (en minutos)	Nivel del agua (en pies)
	1
	2
	3
	4
	5
	6
	7
	7.5

Grupo de problemas

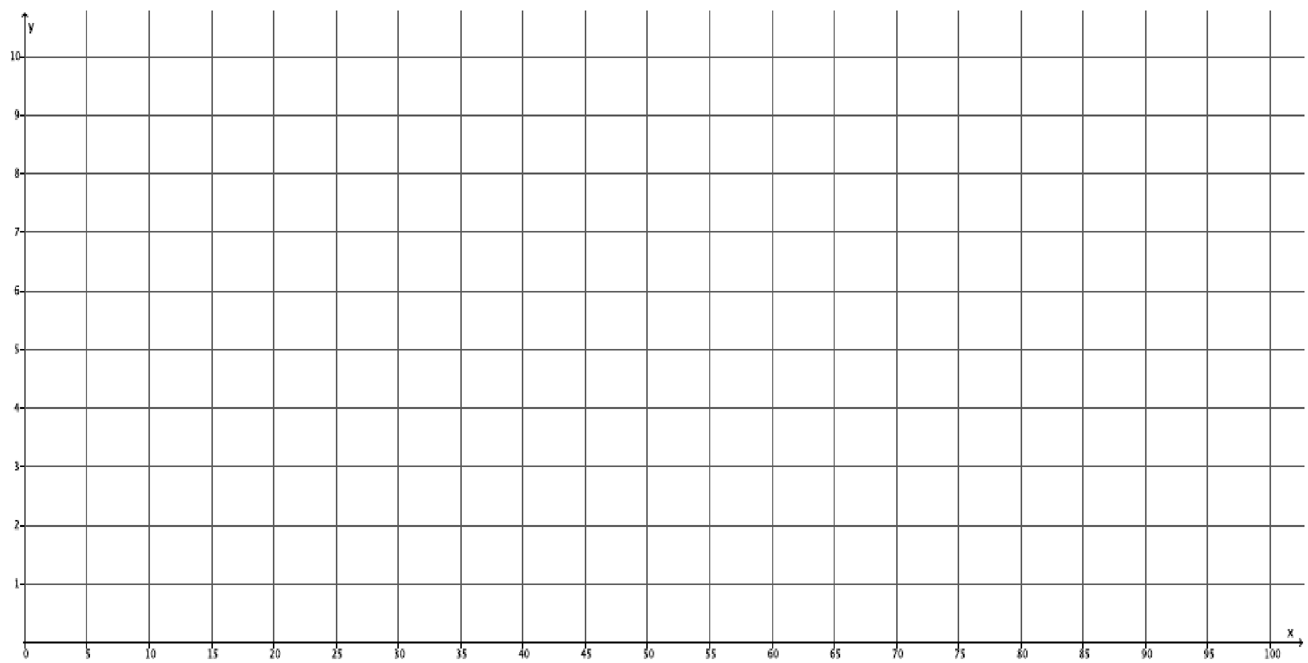
1. Completa la siguiente tabla que incluye más intervalos de los niveles de agua del cono sobre el cual se discutió en clase. Después, representa gráficamente los datos en un plano cartesiano.

Tiempo (en minutos)	Nivel del agua (en pies)
	1
	1.5
	2
	2.5
	3
	3.5
	4
	4.5
	5
	5.5
	6
	6.5
	7
	7.5

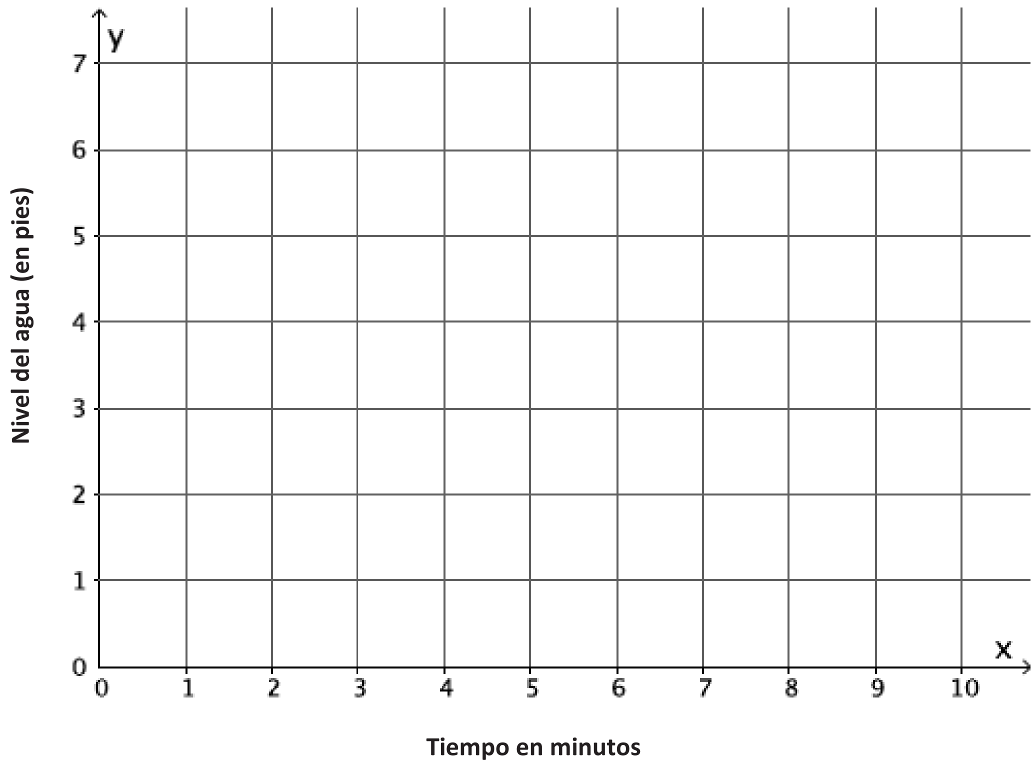


2. Completa la siguiente tabla y representa gráficamente los datos en un plano cartesiano. Compara las gráficas a partir de los Problemas 1 y 2. ¿Qué notas? Si pudieras escribir una regla para describir la función de la velocidad de cambio del nivel del agua del cono, ¿qué podría incluir la regla?

x	$\sqrt{x}$
1	
4	
9	
16	
25	
36	
49	
64	
81	
100	



3. Describe, intuitivamente, la tasa de cambio del nivel del agua si el recipiente que se llena fuera un cilindro. ¿Obtendríamos los mismos resultados que con el cono? ¿Por qué sí o por qué no? Traza una gráfica de cómo se vería el llenado del cilindro y explica cómo la gráfica se relaciona con tu respuesta.



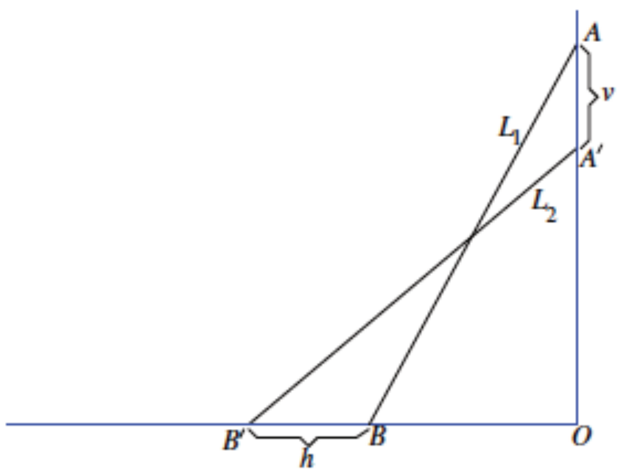
4. Describe, de manera intuitiva, la tasa de cambio si el recipiente que se llena fuera una esfera. ¿Obtendríamos los mismos resultados que con el cono? ¿Por qué sí o por qué no?

Lección 23: Movimiento no lineal

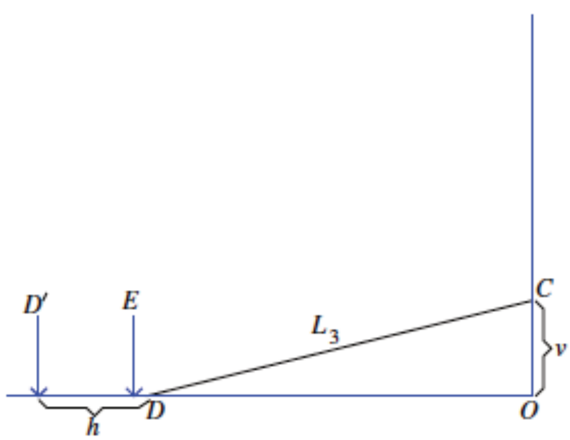
Trabajo en clase

Ejercicio de representación matemática

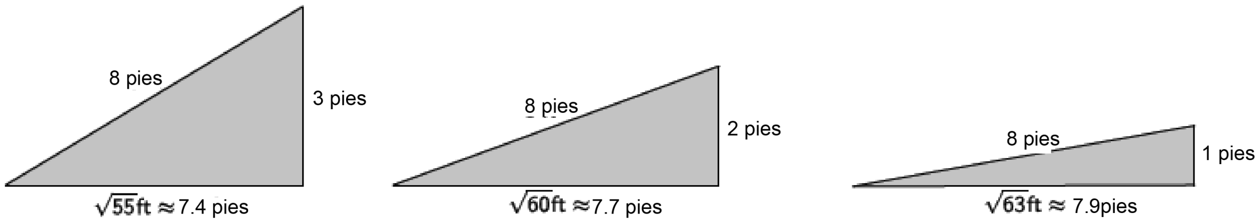
Una escalera de L ft de longitud apoyada contra una pared se desliza hacia abajo. La escalera comienza al ras del piso (justo en contra) de la pared. La parte superior de la escalera se desliza por la pared vertical a una velocidad constante de v ft por segundo. Sea la escalera en la posición L_1 que se desliza hacia la posición L_2 después de 1 segundo, como se muestra a continuación.

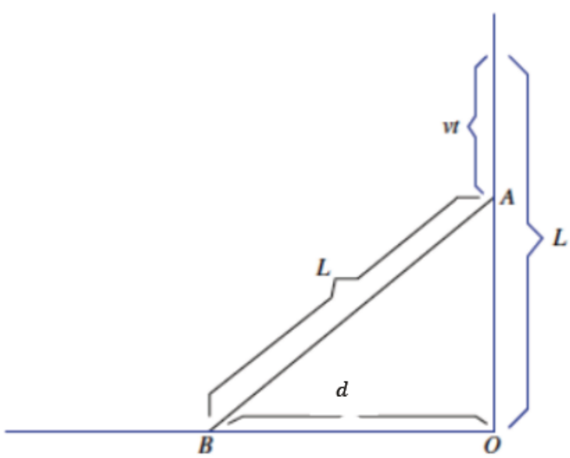


¿La parte inferior de la escalera se moverá a una velocidad constante desde el punto O?



Ten en cuenta los tres triángulos rectángulos que se muestran a continuación, en particular el cambio en la longitud de la base a medida que la altura disminuye en incrementos de 1 ft.





Entrada (en segundos) t	Salida (en pies) $d = \sqrt{225 - (15 - t)^2}$
0	
1	
3	
4	
7	
8	
14	
15	

Grupo de problemas

1. Supongamos que la escalera tiene $\mathbf{10}$ pies de largo y la parte superior de la escalera se desliza por la pared a una velocidad de $\mathbf{0.8\ ft}$ por segundo. Calcula la tasa de cambio promedio de la posición de la parte inferior de la escalera durante los intervalos de tiempo de $\mathbf{0}$ a $\mathbf{0.5}$ segundos, de $\mathbf{3}$ a $\mathbf{3.5}$ segundos, de $\mathbf{7}$ a $\mathbf{7.5}$ segundos, de $\mathbf{9.5}$ a $\mathbf{10}$ segundos y de $\mathbf{12}$ a $\mathbf{12.5}$ segundos. ¿Cómo interpretas estos números?

Entrada (en segundos) $\boldsymbol{t}$	**Salida (en pies)** $\boldsymbol{d = \sqrt{100 - (10 - 0.8t)^2}}$
0	
0.5	
3	
3.5	
7	
7.5	
9.5	
10	
12	
12.5	

2. ¿Cualquier longitud de la escalera, L y cualquier velocidad constante de deslizamiento de la parte superior de la escalera, v ft por segundo, producirá una tasa constante de cambio de la posición de la parte inferior de la escalera? Explica.