Una historia de proporciones®

Eureka Math™

8.º grado Módulo 1

Archivo del estudiante_A

Cuaderno de trabajo del estudiante

Este archivo contiene:
- G8-M1 Trabajo en clase
- G8-M1 Grupos de problemas

Publicado por la organización sin fines de lucro Great Minds.

Impreso en EE. UU.
Este libro puede comprarse directamente en la editorial en eureka-math.org
10 9 8 7 6 5 4 3 2

G8-M1-SFA-1.1.0-07.2017

Lección 1: Notación exponencial

Trabajo en clase

5^6 significa $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ y $\left(\frac{9}{7}\right)^4$ significa $\frac{9}{7} \times \frac{9}{7} \times \frac{9}{7} \times \frac{9}{7}$.

Has visto este tipo de notación antes; se llama notación exponencial. En general, para cualquier número x y cualquier número entero positivo n,

$$x^n = \underbrace{(x \cdot \mathrm{x} \cdots \mathrm{x})}_{n \text{ veces}}.$$

Al número x^n se le llama x elevado a la n^{a} potencia, donde n es el exponente de x en x^n y x es la base de x^n.

Ejercicio 1

$\underbrace{4 \times \cdots \times 4}_{7 \text{ veces}} =$

Ejercicio 2

$\underbrace{3.6 \times \cdots \times 3.6}_{\_\_\_\_\_ \text{ veces}} = 3.6^{47}$

Ejercicio 3

$\underbrace{(-11.63) \times \cdots \times (-11.63)}_{34 \text{ veces}} =$

Ejercicio 4

$\underbrace{12 \times \cdots \times 12}_{\_\_\_\_\_ \text{veces}} = 12^{15}$

Ejercicio 5

$\underbrace{(-5) \times \cdots \times (-5)}_{10 \text{ veces}} =$

Ejercicio 6

$\underbrace{\frac{7}{2} \times \cdots \times \frac{7}{2}}_{21 \text{ veces}} =$

Ejercicio 7

$\underbrace{(-13) \times \cdots \times (-13)}_{6 \text{ veces}} =$

Ejercicio 8

$\underbrace{\left(-\frac{1}{14}\right) \times \cdots \times \left(-\frac{1}{14}\right)}_{10 \text{ veces}} =$

Ejercicio 9

$\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{185 \text{ veces}} =$

Ejercicio 10

$\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{\_\_\_\_\_ \text{ veces}} = x^n$

Ejercicio 11

¿Estos productos serán positivos o negativos? ¿Cómo lo sabes?

$$\underbrace{(-1) \times (-1) \times \cdots \times (-1)}_{12 \text{ veces}} = (-1)^{12}$$

$$\underbrace{(-1) \times (-1) \times \cdots \times (-1)}_{13 \text{ veces}} = (-1)^{13}$$

Ejercicio 12

¿Es necesario hacer todos los cálculos para determinar el signo del producto? ¿Por qué sí o por qué no?

$$\underbrace{(-5) \times (-5) \times \cdots \times (-5)}_{95 \text{ veces}} = (-5)^{95}$$

$$\underbrace{(-1.8) \times (-1.8) \times \cdots \times (-1.8)}_{122 \text{ veces}} = (-1.8)^{122}$$

Ejercicio 13

Llena los espacios en blanco para indicar si el número es positivo o negativo.

Si n es un número par positivo, entonces $(-55)^n$ es ___________________________.

Si n es un número impar positivo, entonces $(-72.4)^n$ es ___________________________.

Ejercicio 14

Josie dice que $\underbrace{(-15) \times \cdots \times (-15)}_{6 \text{ veces}} = -15^6$. ¿Está en lo correcto? ¿Cómo lo sabes?

Grupo de problemas

1. Usa lo que sabes acerca de la notación exponencial para completar las siguientes expresiones.

$\underbrace{(-5) \times \cdots \times (-5)}_{17 \text{ veces}} =$

$\underbrace{3.7 \times \cdots \times 3.7}_{\_\_\_\_ \text{ veces}} = 3.7^{19}$

$\underbrace{7 \times \cdots \times 7}_{\_\_\_\_ \text{ veces}} = 7^{45}$

$\underbrace{6 \times \cdots \times 6}_{4 \text{ veces}} =$

$\underbrace{4.3 \times \cdots \times 4.3}_{13 \text{ veces}} =$

$\underbrace{(-1.1) \times \cdots \times (-1.1)}_{9 \text{ veces}} =$

$\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right) \times \cdots \times \left(\frac{2}{3}\right)}_{19 \text{ veces}} =$

$\underbrace{\left(-\frac{11}{5}\right) \times \cdots \times \left(-\frac{11}{5}\right)}_{\_\_\_\_ \text{ veces}} = \left(-\frac{11}{5}\right)^x$

$\underbrace{(-12) \times \cdots \times (-12)}_{\_\_\_\_ \text{ veces}} = (-12)^{15}$

$\underbrace{a \times \cdots \times a}_{m \text{ veces}} =$

2. Escribe una expresión con (-1) como su base que producirá un producto positivo y explica por qué tu respuesta es válida.

3. Escribe una expresión con (-1) como su base que producirá un producto negativo y explica por qué tu respuesta es válida.

4. Reescribe cada número en notación exponencial utilizando 2 como la base.

$8 =$ $\qquad 16 =$ $\qquad 32 =$

$64 =$ $\qquad 128 =$ $\qquad 256 =$

5. Tim escribió 16 como $(-2)^4$. ¿Tiene razón? Explica.

6. ¿-2 se podría usar como una base para reescribir 32? ¿64? ¿Por qué sí o por qué no?

Lección 2: Multiplicar números en forma exponencial

Trabajo en clase

En general, si x es cualquier número y m son enteros positivos, entonces

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

porque

$$x^m \times x^n = \underbrace{(x \cdots x)}_{m \text{ veces}} \times \underbrace{(x \cdots x)}_{n \text{ veces}} = \underbrace{(x \cdots x)}_{m+n \text{ veces}} = x^{m+n}.$$

Ejercicio 1

$14^{23} \times 14^8 =$

Ejercicio 2

$(-72)^{10} \times (-72)^{13} =$

Ejercicio 3

$5^{94} \times 5^{78} =$

Ejercicio 4

$(-3)^9 \times (-3)^5 =$

Ejercicio 5

Sea a número.

$a^{23} \cdot a^8 =$

Ejercicio 6

Sea que f un número.

$f^{10} \cdot f^{13} =$

Ejercicio 7

Sea b un número.

$b^{94} \cdot b^{78} =$

Ejercicio 8

Sea x un entero positivo. Si $(-3)^9 \times (-3)^x = (-3)^{14}$, ¿cuánto es x?

¿Qué pasaría si hubiera términos con la misma base? Escribe una expresión equivalente para cada problema.

Ejercicio 9

$9^4 \times 9^6 \times 9^{13} =$

Ejercicio 10

$2^3 \times 2^5 \times 2^7 \times 2^9 =$

¿Podemos escribir lo siguiente de forma más simple? Si es así, escribe una expresión equivalente. Si no es así, explica por qué.

Ejercicio 11

$6^5 \times 4^9 \times 4^3 \times 6^{14} =$

Ejercicio 14

$2^4 \times 8^2 = 2^4 \times 2^6 =$

Ejercicio 12

$(-4)^2 \cdot 17^5 \cdot (-4)^3 \cdot 17^7 =$

Ejercicio 15

$3^7 \times 9 = 3^7 \times 3^2 =$

Ejercicio 13

$15^2 \cdot 7^2 \cdot 15 \cdot 7^4 =$

Ejercicio 16

$5^4 \times 2^{11} =$

Ejercicio 17

Sea x un número. Reescribe la expresión de una forma más simple.

$(2x^3)(17x^7) =$

Ejercicio 18

Sean a y b números. Usa la ley distributiva reescribir la expresión de una forma más simple.

$a(a + b) =$

Ejercicio 19

Sean a y b números. Usa la ley distributiva para reescribir la expresión de una forma más simple.

$b(a+b)=$

Ejercicio 20

Sean a y b números. Usa la ley distributiva para reescribir la expresión de una forma más simple.

$(a+b)(a+b)=$

En general, si x es un número distinto a cero y m, n son enteros positivos, entonces

$$\frac{x^m}{x^n}=x^{\mathrm{m-n}}.$$

Ejercicio 21

$\frac{7^9}{7^6}=$

Ejercicio 22

$\frac{(-5)^{16}}{(-5)^7}=$

Ejercicio 23

$\frac{\left(\frac{8}{5}\right)^9}{\left(\frac{8}{5}\right)^2}=$

Ejercicio 24

$\frac{13^5}{13^4}=$

Ejercicio 25

Sean a,b números distintos de cero. ¿Cuál es el siguiente número?

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^9}{\left(\frac{a}{b}\right)^2} =$$

Ejercicio 26

Sea x un número no cero. ¿Cuál es el siguiente número?

$$\frac{x^5}{x^4} =$$

¿Puedes escribir lo siguiente de forma más simple? Si es así, escribe una expresión equivalente para cada problema. Si no es así, explica por qué.

Ejercicio 27

$$\frac{2^7}{4^2} = \frac{2^7}{2^4} =$$

Ejercicio 28

$$\frac{3^{23}}{27} = \frac{3^{23}}{3^3} =$$

Ejercicio 29

$$\frac{3^5 \cdot 2^8}{3^2 \cdot 2^3} =$$

Ejercicio 30

$$\frac{(-2)^7 \cdot 95^5}{(-2)^5 \cdot 95^4} =$$

Ejercicio 31

Sea x un número. Escribe cada expresión de una forma más simple.

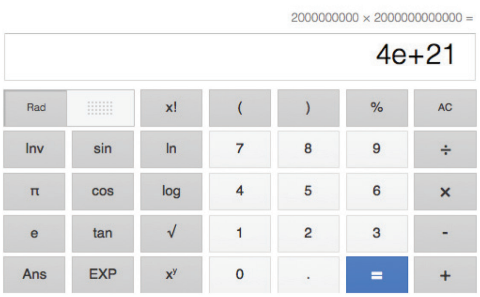
a. $\frac{5}{x^3}(3x^8) =$

b. $\frac{5}{x^3}(-4x^6) =$

c. $\frac{5}{x^3}(11x^4) =$

Ejercicio 32

Anne usó una calculadora en línea para multiplicar $2\,000\,000\,000 \times 2\,000\,000\,000\,000$. La respuesta en la calculadora es $4\mathrm{e} + 21$, como se muestra a continuación. ¿La respuesta de la calculadora es correcta? ¿Cómo lo sabes?



Grupo de problemas

1. Se deja caer una pelota desde una altura de x pies. Siempre rebota hasta $\frac{2}{3}x$ pies. Supongamos que se deja caer la pelota desde 10 pies y es detenida exactamente cuando toca el piso, después del $30,^{0}$ rebote. ¿Cuál es la distancia total que recorrió la pelota? Expresa tu respuesta en notación exponencial.

Rebote	Cálculo de la distancia recorrida en el rebote anterior	Distancia total recorrida (en pies)
1		
2		
3		
4		
30		
n		

2. Si la misma pelota se deja caer desde 10 pies y es detenida exactamente en el punto más alto, después de $25.°$ rebote, ¿cuál es la distancia total que recorre la pelota? Usa lo que aprendiste en el problema anterior.

3. Sean a y b números y $b \neq 0$, sean m y n enteros positivos. Escribe cada expresión usando la menor cantidad de bases posibles.

$(-19)^5 \cdot (-19)^{11} =$	$2.7^5 \times 2.7^3 =$
$\frac{7^{10}}{7^3} =$	$\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{15} =$
$\left(-\frac{9}{7}\right)^m \cdot \left(-\frac{9}{7}\right)^n =$	$\frac{ab^3}{b^2} =$

4. Sea las dimensiones del rectángulo $(4 \times (+871209)^5 + 3 \times 49762105)$ ft. por $(7 \times (+871209)^3 - (+49762105)^4)$ ft.. Determina el área del rectángulo. (Pista: No necesitas desarrollar las potencias).

5. Un terreno rectangular se está vendiendo por partes. El área total del terreno es 2^{15} millas cuadradas. Los fragmentos que están en venta miden 8^3 millas cuadradas. ¿Cuántas partes del terreno del tamaño mencionado se pueden vender? Calcula el total de fragmentos.

Lección 3: Números en forma exponencial elevados a una potencia

Trabajo en clase

Para cualquier número x y cualquier entero positivo m y n,

$$(x^m)^n = x^{nm}$$

porque

$$\begin{aligned}(x^m)^n &= (\underbrace{x \cdot \mathrm{x} \cdots \mathrm{x}}_{m \text{ veces}})^n \\ &= \underbrace{(\underbrace{x \cdot x \cdots \mathrm{x}}_{m \text{ veces}}) \times \cdots \times (\underbrace{x \cdot \mathrm{x} \cdots \mathrm{x}}_{m \text{ veces}})}_{n \text{ times}} \\ &= x^{nm}.\end{aligned}$$

Ejercicio 1

$(15^3)^9 =$

Ejercicio 2

$((-2)^5)^8 =$

Ejercicio 3

$(3.4^{17})^4 =$

Ejercicio 4

Sea s un número.

$(s^{17})^4 =$

Ejercicio 5

Sarah escribió $(3^5)^7 = 3^{12}$. Corrige su error. Escribe una ecuación exponencial usando una base de 3 y exponentes de 5, 7, y 12, lo que haría que su respuesta fuera correcta.

Ejercicio 6

Un número y satisface $y^{24} - 256 = 0$. ¿Qué ecuación satisface el número $x = y^4$?

Para cualquier número x y y, y el entero positivo n,

$$(xy)^n = x^n y^n$$

porque

$$\begin{aligned}(xy)^n &= \underbrace{(xy)\cdots(xy)}_{n \text{ veces}}\\ &= \underbrace{(x \cdot x \cdots x)}_{n \text{ veces}} \cdot \underbrace{(y \cdot y \cdots y)}_{n \text{ veces}}\\ &= x^n y^n.\end{aligned}$$

Ejercicio 7

$(11 \times 4)^9 =$

Ejercicio 8

$(3^2 \times 7^4)^5 =$

Ejercicio 9

Sean a, b, y c números.

$(3^2 a^4)^5 =$

Ejercicio 10

Sea x un número.

$(5x)^7 =$

Ejercicio 11

Sean x y y números.

$(5xy^2)^7 =$

Ejercicio 12

Sean a, b, y c números.

$(a^2 bc^3)^4 =$

Ejercicio 13

Sean x y y números, $y \neq 0$, y sea n un entero positivo. ¿Cómo $\left(\frac{x}{y}\right)^n$ se relaciona a x^n y y^n?

Grupo de problemas

1. Muestra (prueba) en detalle por qué $(2 \cdot 3 \cdot 7)^4 = 2^4 3^4 7^4$.

2. Muestra (prueba) en detalle por qué $(XYZ)^4 = x^4 y^4 z^4$ para cualquier número x, y, z.

3. Muestra (prueba) en detalle por qué $(XYZ)^n = x^n y^n z^n$ para cualquier número , y, , y z y para cualquier número entero positivo n.

Lección 4: Números elevados a la potencia cero

Trabajo en clase

Hemos demostrado que para cualquier número x, y, y cualquier entero positivo m, n, lo siguiente aplica

(1)

$$(x^m)^n = x^{mn} \qquad (2)$$

$$(xy)^n = x^n y^n. \qquad (3)$$

Definición: ____

Ejercicio 1

Haz una lista de todos los casos posibles de números enteros m y n para la identidad (1). Y, más precisamente, cuando $m > 0$ y $n > 0$, ya sabemos que (1) es correcto. ¿Cuáles son los otros casos posibles de m y n para los cuales (1) aun debe verificarse?

Ejercicio 2

Verifica que la ecuación (1) sea correcta para cada uno de los casos listados en el Ejercicio 1.

Ejercicio 3

Haga lo mismo con la ecuación (2) al verificarla caso por caso.

Ejercicio 4

Haz lo mismo con la ecuación (3) al verificarla caso por caso.

Ejercicio 5

Escribe la forma desarrollada de 8.374 usando la notación exponencial.

Ejercicio 6

Escribe la forma desarrollada de 6985062 usando la notación exponencial.

Grupo de problemas

Sean x, y números $(x, y \neq 0)$. Simplifica cada una de las siguientes expresiones.

1. $\dfrac{y^{12}}{y^{12}} =$	2. $9^{15} \cdot \dfrac{1}{9^{15}} =$
3. $(7(123456.789)^4)^0 =$	4. $2^2 \cdot \dfrac{1}{2^5} \cdot 2^5 \cdot \dfrac{1}{2^2} =$
5. $\dfrac{x^{41}}{y^{15}} \cdot \dfrac{y^{15}}{x^{41}} =$	

Lección 5: Exponentes negativos y leyes de los exponentes

Trabajo en clase

Definición: Para cualquier número no cero x, y para cualquier número entero positivo n, definimos x^{-n} como $\frac{1}{x^n}$.

Tengan en cuenta que esta definición de exponentes negativos dice x^{-1} es simplemente el recíproco, $\frac{1}{x}$, de x.

Como consecuencia de la definición, para un no negativo x y todos los *números enteros* b, obtenemos

$$x^{-b} = \frac{1}{x^b}$$

Ejercicio 1

Verifica la declaración general $x^{-b} = \frac{1}{x^b}$ para $x = 3$ y $b = -5$.

Ejercicio 2

¿Cuál es el valor de (3×10^{-2})?

Ejercicio 3

¿Cuál es el valor de (3×10^{-5})?

Ejercicio 4

Escribe la forma expandida completa del decimal 4.728 en notación exponencial.

Para los Ejercicios 5-10, escribe una expresión equivalente, en notación exponencial, para la expresión dada y simplifica tanto como sea posible.

Ejercicio 5

$5^{-3} =$

Ejercicio 6

$\frac{1}{8^9} =$

Ejercicio 7

$3 \cdot 2^{-4} =$

Ejercicio 8

Sea x un número no cero.

$x^{-3} =$

Ejercicio 9

Sea x un número no cero.

$\frac{1}{x^9} =$

Ejercicio 10

Sean x, y dos números no cero.

$xy^{-4} =$

Aceptamos que para los números no cero x y y y todos los números enteros a y b,

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$
$$(x^b)^a = x^{ab}$$
$$(xy)^a = x^a y^a.$$

Afirmamos

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \qquad \text{para todos los enteros } a, b.$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a} \qquad \text{para cualquier entero } a.$$

Ejercicio 11

$$\frac{19^2}{19^5} =$$

Ejercicio 12

$$\frac{17^{16}}{17^{-3}} =$$

Ejercicio 13

Si asumimos que $b = -1$ en (11), a sea cualquier número entero, y y sea cualquier número diferente de cero, ¿qué obtenemos?

Ejercicio 14

Muestra directamente que $\left(\frac{7}{5}\right)^{-4} = \frac{7^{-4}}{5^{-4}}$.

Grupo de Problemas

1. Calcula: $3^3 \times 3^2 \times 3^1 \times 3^0 \times 3^{-1} \times 3^{-2} =$

   Calcula: $5^2 \times 5^{10} \times 5^8 \times 5^0 \times 5^{-10} \times 5^{-8} =$

   Calcula para un número no cero, a: $a^m \times a^n \times a^l \times a^{-n} \times a^{m.} \times a^{l.} \times a^0 =$

2. Sin usar (10), muestra directamente que $(17.6^{-1})^8 = 17.6^{-8}$.

3. Sin usar (10), muestra (prueba) que para cualquier número entero n y cualquier número positivo y, $(y^{-1})^n = y^{-n}$.

4. Sin usar (13), muestra directamente que $\frac{2.8^{-5}}{2.8^7} = 2.8^{-12}$.

Hoja de referencia de ecuaciones

Para cualesquiera números x, y [$x \neq 0$ en (4) y $y \neq 0$ en (5)] y cualquier entero positivo m, n, aplica lo siguiente:	
$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$	(1)
$(x^m)^n = x^{mn}$	(2)
$(xy)^n = x^n y^n$	(3)
$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	(4)
$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$	(5)
Para cualesquiera números x, y y para todos los números enteros m, n, aplica lo siguiente:	
$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$	(6)
$(x^m)^n = x^{mn}$	(7)
$(xy)^n = x^n y^n$	(8)
Para cualquier número diferente de cero x y todos los números enteros b, aplica lo siguiente:	
$x^{-b} = \frac{1}{x^b}$	(9)
Para cualesquiera números x, y y todos los números enteros a, b, aplica lo siguiente:	
$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	(10)
$(x^b)^a = x^{ab}$	(11)
$(xy)^a = x^a y^a$	(12)
$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \; x \neq 0$	(13)
$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a} \; x, y \neq 0$	(14)

Lección 6: Pruebas de las leyes de los exponentes

Trabajo en clase

Las leyes de los exponentes

Para $x, y \neq 0$, y todos los números enteros a, b, se aplica lo siguiente:

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

$$(x^b)^a = x^{ab}$$

$$(xy)^a = x^a y^a.$$

Operaciones que utilizaremos para demostrar (11):

(A) Se sabe que (11) es verdadera cuando los números enteros a y b satisfacen $a \geq 0,\ b \geq 0$.

(B) $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ para cualquier número entero m.

(C) $\left(\frac{1}{x}\right)^m = \frac{1}{x^m}$ para cualquier número entero m.

Ejercicio 1

Demuestra que **(C)** está implícita en la ecuación (5) de la Lección 4 cuando $m > 0$, y explica por qué **(C)** continúa siendo válida, aunque $m = 0$.

Ejercicio 2

Demuestra que **(B)** es en realidad un caso especial de (11) reescribiéndose como $(x^m)^{-1} = x^{(-1)m}$ para cualquier número entero m, de marera que si $b = m$ (donde m es un número entero) y $a = -1$, (11) se convierte en **(B)**.

Ejercicio 3

Demuestra que **(C)** es un caso especial de (11) reescribiendo **(C)** como $(x^{-1})^m = x^{m(-1)}$ para cualquier número entero m. Por lo tanto, **(C)** es el caso especial de (11) cuando $b = -1$ y $a = m$, donde m es un número entero.

Ejercicio 4

Prueba de Caso (iii): Demuestra que cuando $a < 0$ y $b \geq 0$, $(x^b)^a = x^{ab}$ sigue siendo válido. Sea $a = -c$ para algún entero positivo c. Demuestra que los lados izquierdo y derecho de $(x^b)^a = x^{ab}$ son iguales.

Grupo de Problemas

1. Enviaste una foto tuya con tu familia de vacaciones a siete amigos de Facebook. Si cada uno de ellos la envía a cinco de sus amigos, y cada uno de esos amigos lo envía a cinco de sus amigos y esos amigos lo envían a cinco más, ¿cuántas personas (sin contarte a ti) verán tu foto? Ningún amigo recibe la foto dos veces. Expresa tu respuesta en notación exponencial.

n.º de personas que ven tu foto	*n.º total de personas que ven tu foto*

2. Demuestra directamente, sin utilizar (11), que $(1.27^{-36})^{85} = 1.27^{-36 \cdot 85}$.

3. Demuestra directamente que $\left(\frac{2}{13}\right)^{-127} \cdot \left(\frac{2}{13}\right)^{-56} = \left(\frac{2}{13}\right)^{-183}$.

4. Prueba que para cualquier número diferente de cero x, $x^{-127} \cdot x^{-56} = x^{-183}$.

5. Prueba que para cualquier número diferente de cero x, $x^{m.} \cdot x^{-n} = x^{-m-n}$ para los enteros positivos m y n.

6. ¿Cuál de los cuatro problemas anteriores te pareció más fácil de resolver? Explica.

7. Usa las propiedades de los exponentes para escribir una expresión equivalente que sea un producto de números primos distintos, cada uno elevado a una potencia entera.

$$\frac{10^5 \cdot 9^2}{6^4} =$$

Lección 7: Magnitud

Trabajo en clase

Hecho 1: El número 10^n, por convención números enteros positivos grandes n, es son números grandes; dado número dado M (no importa lo grande sea) hay una potencia de 10 mayor que M.

Hecho 2: *El número* 10^{-n} por convención *números enteros positivos pequeños* n, son números pequeños; dado un número positivo S (no importa lo pequeño que sea), hay una potencia de 10 menor a S.

Ejercicio 1

Sea $M = 993{,}456{,}789{,}098{,}765$. Encuentra la potencia más pequeña de 10 que sea mayor a M.

Ejercicio 2

Sea $= 78{,}491\frac{899}{987}$. Encuentra la potencia más pequeña de 10 que sea mayor que M.

Ejercicio 3

Supongamos que M es un entero positivo. Encuentra la potencia más pequeña de 10 que sea mayor.

Ejercicio 4

La probabilidad de tener el mismo ADN que otra persona (que no sea un gemelo idéntico) es aproximadamente de 1 en 10 mil millones (un mil millones es 1 seguido por12 ceros). Dada la fracción, expresa este número muy pequeño utilizando una potencia negativa de 10.

$$\frac{1}{10\,000\,000\,000\,000}$$

Ejercicio 5

La probabilidad de ganar un gran premio de la lotería es de 10^{-8} y la posibilidad de ser alcanzado por un rayo en los EE.UU. en un año determinado es de $0.000\,001$. ¿Cuál tienes una mayor probabilidad de experimentar? Explique.

Ejercicio 6

Hay alrededor de 100 millones de teléfonos inteligentes en los EE.UU. Tu maestro tiene un teléfono inteligente. ¿Qué proporción de teléfonos inteligentes en los Estados Unidos tiene tu maestro? Expresa tu respuesta usando una potencia negativa de 10.

Grupo de problemas

1. ¿Cuál es la potencia más pequeña de 10 que es mayor que $987{,}654{,}321{,}098{,}765{,}432$?

2. ¿Cuál es la potencia más pequeña de 10 que es mayor que 999999999991?

3. ¿Qué número es equivalente a $0.000\,000\,1$: 10^{7} o 10^{-7}? ¿Cómo lo sabes?

4. Sara dijo que $0.000\,01$ es más grande que 0.001 debido a que el primer número tiene más dígitos a la derecha del punto decimal. ¿Sara está en lo correcto? Explica tu pensamiento usando potencias negativas de 10 y la recta numérica.

5. Ordena los siguientes números de menor a mayor:

$$10^{5} \qquad 10^{-99} \qquad 10^{-17} \qquad 10^{14} \qquad 10^{-5} \qquad 10^{30}$$

Lección 8: Calcular cantidades

Trabajo en clase

Ejercicio 1

El Banco de la Reserva Federal declara que una familia promedio tenía, en enero 2013 una deuda en tarjeta de crédito de $\$7{,}122$. ¿Cuántas veces más grande es la deuda nacional de EE.UU., que es de $\$16{,}755{,}133{,}009{,}522$? Reescriban cada número a la potencia más cercana a 10 que la excede y compara.

Ejercicio 2

En Nueva York, aproximadamente $3{,}000{,}000$ estudiantes van a la escuela, de kindergarten al 12.º grado. Escriban el total de estudiantes como un entero de un dígito multiplicado por una potencia de 10:

El número promedio de estudiantes que van a la escuela intermedia en Nueva York es 8×10^2. ¿Cuántas veces más grande es el número total de estudiantes en K–12 comparado con el promedio de estudiantes de la escuela intermedia?

Ejercicio 3

Un cálculo prudente del total de estrellas en el universo es 6×10^{22}. El ojo humano de un ser humano promedio puede ver aproximadamente $3{,}000$ estrellas en la noche. ¿Cuántas estrellas más hay en el universo comparadas con aquellas que el ojo humano puede ver?

Ejercicio 4

Se estima que la población mundial en 2011 era de 7×10^9 personas. De la población total, 682 millones de esas personas son zurdas. ¿Aproximadamente qué porcentaje de la población mundial es zurda, según el cálculo del 2011?

Ejercicio 5

Una persona promedio toma $30{,}000$ respiros por día. Expresa este número como un entero de un dígito multiplicado por la potencia de 10.

En promedio, un estadounidense vive aproximadamente 80 años (o aproximadamente $30{,}000$ días), ¿cuántos respiros en total tomaría una persona en toda su vida?

Grupo de problemas

1. La región del océano Atlántico contiene, aproximadamente, 2×10^{16} galones de agua. El lago Ontario tiene, aproximadamente, $8{,}000{,}000{,}000{,}000$ galones de agua. ¿Cuántos lagos Ontario -en términos de galones de agua- se necesitarían para llenar el Océano Atlántico?

2. Los bosques nacionales de EE.UU. abarcan, aproximadamente, $300{,}000$ millas cuadradas. Los ecologistas desean que la superficie total de los bosques sea $300{,}000^2$ millas cuadradas. Cuando Ivanna usó su teléfono para hacer el cálculo, la pantalla mostró los siguiente:

   a. ¿Qué significa la respuesta en la pantalla? Explica cómo lo sabes.

   b. Puesto que EE.UU. tiene aproximadamente 4 millones de millas cuadradas de tierra, ¿es razonable el objetivo de los ecologistas? Explica.

3. El estadounidense promedio es responsable de aproximadamente $20{,}000$ kilogramos de las emisiones de carbono al año. Expresa este número como un entero de un dígito multiplicado por una potencia de 10.

4. El Reino Unido es responsable de aproximadamente 1×10^4 kilogramos de las emisiones de carbono al año. ¿Qué país es responsable del mayor número de emisiones de carbono al año? ¿Cuánto más?

Lección 9: Notación científica

Trabajo en clase

Un decimal finito positivo s tiene que estar escrito en notación científica si se expresa como un producto $d \times 10^n$, donde d es un decimal finito de manera que $1 \leq d < 10$ y n es un número entero.

El entero n se llama el orden de la magnitud del decimal $d \times 10^n$.

¿Los siguientes números están escritos en notación científica? Si no es así, indica el motivo.

Ejercicio 1

1.908×10^{17}

Ejercicio 2

0.325×10^{-2}

Ejercicio 3

7.99×10^{32}

Ejercicio 4

$4.0701 + 10^7$

Ejercicio 5

18.432×5^8

Ejercicio 6

8×10^{-11}

Usa la tabla siguiente para completar los Ejercicios 7 y 8.

La siguiente tabla muestra la deuda de los tres estados más poblados y de los tres estados con menor población.

Estado	Deuda (en dólares)	Población (2012)
California	$407,000,000,000$	$38,000,000$
Nueva York	$337,000,000,000$	$19,000,000$
Texas	$276,000,000,000$	$26,000,000$
Dakota del Norte	$4,000,000,000$	$690,000$
Vermont	$4,000,000,000$	$626,000$
Wyoming	$2,000,000,000$	$576,000$

Ejercicio 7

a. ¿Cuál es la suma de las deudas correspondientes a los tres estados más poblados? Expresa tu respuesta en notación científica.

b. ¿Cuál es la suma de la deuda de los tres estados con menor población? Expresa tu respuesta en notación científica.

c. ¿Cuánto más grande es la deuda combinada de los tres estados más poblados que la de los tres estados con menor población? Expresa tu respuesta en notación científica.

Ejercicio 8

a. ¿Cuál es la suma de la población de los tres estados más poblados? Expresa tu respuesta en notación científica.

b. ¿Cuál es la suma de la población de los tres estados menos poblados? Expresa tu respuesta en notación científica.

c. Aproximadamente, ¿cuántas veces es más grande la población total de California, Nueva York y Texas en comparación con la población total de Dakota del Norte, Vermont y Wyoming?

Ejercicio 9

Todos los planetas giran alrededor del Sol en órbitas elípticas. La distancia de Urano al Sol —en su punto más distante del Sol— es de aproximadamente 3.004×10^9 km y la más corta es de aproximadamente 2.749×10^9 km. Con esta información, ¿cuál es la distancia promedio a Urano desde el Sol?

Grupo de problemas

1. Escribe el número $68{,}127{,}000{,}000{,}000{,}000$ en notación científica. ¿Cuál de las dos representaciones de este número prefieres? Explica.

2. Aquí están las masas de los llamados planetas interiores del sistema solar.

   Mercurio: 5.9722×10^{24} kg Tierra: 5.9722×10^{24} kg

   Venus: 5.9722×10^{24} kg Marte: 5.9722×10^{24} kg

   ¿Cuál es la masa media de los cuatro planetas interiores? Escribe tu respuesta en notación científica.

Lección 10: Operaciones con números en notación científica

Trabajo en clase

Ejercicio 1

La velocidad de la luz es de $300{,}000{,}000$ metros por segundo. El Sol está aproximadamente a 1.5×10^{11} metros de la Tierra. ¿Cuántos segundos le toma a la luz del Sol llegar a la Tierra?

Ejercicio 2

La masa de la Luna es más o menos 7.3×10^{22} kg. Serían necesarias aproximadamente $26{,}000{,}000$ lunas para igualar la masa del Sol. Determina la masa del Sol.

Ejercicio 3

La masa de la Tierra es 5.9×10^{24} kg. La masa de Plutón es $13{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000$ kg. Comparada con la de Plutón, ¿cuán mayor es la masa de la Tierra que la masa de Plutón?

Ejercicio 4

Usando la información en los Ejercicios 2 y 3, encuentra la masa combinada de la Luna, la Tierra y Plutón.

Ejercicio 5

¿Cuántas masas combinadas de la Luna, la Tierra y Plutón (es decir, la respuesta del Ejercicio 4) son necesarias para igualar la masa del Sol (es decir, la respuesta del Ejercicio 2)?

Grupo de problemas

1. El Sol produce 3.8×10^{27} julios de energía por segundo. ¿Cuánta energía se produce en un año? (Nota: un año es aproximadamente $31{,}000{,}000$ segundos).

2. En promedio, Mercurio está aproximadamente a 57000000 km del Sol, mientras que Neptuno está aproximadamente a 4.5×10^{9} km del Sol. ¿Cuál es la diferencia entre las distancias del Sol de Mercurio y de Neptuno?

3. La masa de la Tierra es aproximadamente 5.9×10^{24} kg y la masa de Venus es aproximadamente 4.9×10^{24} kg.
   a. Encuentra su masa combinada.
   b. Dado que la masa del Sol es aproximadamente 1.9×10^{30} kg, ¿cuántos Venus y Tierras serían necesarios para igualar la masa del Sol?

Lección 11: La eficacia de la notación científica

Trabajo en clase

Ejercicio 1

La masa de un protón es

$$0.000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,672\,622 \text{ kg.}$$

En notación científica es

Ejercicio 2

La masa de un electrón es

$$0.000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,910\,938\,291 \text{ kg.}$$

En notación científica es

Ejercicio 3

Escriba la razón que compara la masa de un protón con la masa de un electrón.

Ejercicio 4

Calcula cuántas veces más pesado es un protón que un electrón (es decir, encuentra el valor de la razón). Redondea tu respuesta final a la unidad más cercana.

Ejemplo 2

La deuda nacional de Estado Unidos hasta marzo 23, 2013, redondeada al dólar más cercano, es $\$16{,}755{,}133{,}009{,}522$. De acuerdo al censo estadounidense de 2012, hay más o menos $313{,}914{,}040$ ciudadanos estadounidenses. ¿Cuál es, aproximadamente, la parte de la deuda que le toca a cada ciudadano estadounidense?

$$\begin{aligned}\frac{1.6755 \times 10^{13}}{3.14 \times 10^{8}} &= \frac{1.6755}{3.14} \times \frac{10^{13}}{10^{8}} \\ &= \frac{1.6755}{3.14} \times 10^{5} \\ &= 0.533598\ldots \times 10^{5} \\ &\approx 0.5336 \times 10^{5} \\ &= 53360\end{aligned}$$

La parte de la deuda nacional que le toca a cada ciudadano estadounidense es cerca de $\$53{,}360$.

Ejercicio 5

El área geográfica de California es 163.696 millas cuadradas y la zona geográfica de los Estados Unidos es 3794101 millas cuadradas Redondeamos estas cifras a 1.637×10^5 y 3.794×10^6. En términos de área, calcula aproximadamente cuántas Californias formarían un Estados Unidos. Después computa la respuesta a la unidad más cercana.

Ejercicio 6

La distancia promedio de la Tierra a la Luna es cerca de 3.84×10^5 km, y la distancia de la Tierra a Marte es aproximadamente 9.24×10^7 km en el año 2014. A este nivel simplista, ¿cuánto más lejano es el viaje de la Tierra a Marte que de la Tierra a la Luna?

Grupo de problemas

1. Hay aproximadamente 7.5×10^{18} granos de arena en la Tierra. Hay aproximadamente 7×10^{27} átomos en un cuerpo humano promedio. ¿Hay más granos de arena en la Tierra o átomos en un cuerpo humano promedio? ¿Cómo lo sabes?

2. ¿Más o menos cuántas veces más átomos hay en un cuerpo humano en comparación cono los granos de arena en la Tierra?

3. Supongamos que las áreas geográficas de California y los Estados Unidos son 1.637×10^5 y 3.794×10^6 millas cuadradas, respectivamente. La población de California (hasta el 2012) es aproximadamente 3.804×10^7 personas. Si la población fuese proporcional al área, ¿cuál sería la población de los Estados Unidos?

4. La población real de los Estados Unidos (hasta 2012) es aproximadamente 3.14×10^8. ¿Cómo se compara la densidad de población de California (es decir, el número de personas por milla cuadrada) con la densidad de población de los Estados Unidos?

Lección 12: Elegir la unidad

Trabajo en clase

Ejercicio 1

Cierta marca de un reproductor de MP3 va a demostrar cuánto tiempo toma reproducir toda su biblioteca musical. Si el número máximo de canciones que puede guardar el reproductor de MP3 es de $1,000$ (y la duración promedio de una canción es de 4 minutos), ¿querrían que el tiempo lo desplieguen en términos de segundos, días o años de reproducción de música? Explica.

Ejercicio 2

Te han pedido que prepares magdalenas glaseadas para vender en un evento escolar de recaudación de fondos. Cada magdalena glaseada contiene cerca de 20 gramos de azúcar. Los coordinadores de la venta de pastelillos esperan que 500 personas asistan al evento. Suponiendo que todos los asistentes comprarán una magdalena, ¿tiene sentido comprar el azúcar en gramos, libras o toneladas? Explica.

Ejercicio 3

El suelo marino se esparce a un ritmo aproximado de 10 cm por año. Si tuvieras que recopilar datos sobre el esparcimiento del suelo marino cada semana, ¿qué unidad deberías usar para registrar sus datos? Explica.

El gigaelectronvoltio, $\frac{\text{GeV}}{c^2}$, es lo que usa un físico de partículas como unidad de masa.

1 gigaelectronvoltio = 1.783×10^{-27} kg

Masa de 1 protón = $1.672\,622 \times 10^{-27}$ kg

Ejercicio 4

Demuestra que la masa de un protón es $0.938 \frac{\text{GeV}}{c^2}$.

En escritos científicos populares, una unidad comúnmente usada es el año luz, o la distancia que viaja la luz en un año (nota: un año se define como 365.25 días).

$$1 \text{ año luz} = 9{,}460{,}730{,}472{,}580.800 \text{ km} \approx 9.46073 \times 10^{12} \text{ km}$$

Ejercicio 5

La distancia del Sol a la estrella más cercana (Próxima Centauri) es de aproximadamente $4.013\,336\,473 \times 10^{13}$ km. Demuestra que Próxima Centauri está a 4.2421 años luz del Sol.

Desafío de exploración 2

Supongamos que estás investigando los diámetros atómicos y encuentras fuentes creíbles que proporcionan los diámetros de cinco átomos diferentes, como se muestra en la siguiente tabla. Todas las medidas son en centímetros.

1×10^{-8}	1×10^{-12}	5×10^{-8}	5×10^{-10}	5.29×10^{-11}

Ejercicio 6

¿Qué nueva unidad podrías presentar para discutir las diferencias en las medidas de los diámetros?

Ejercicio 7

Nombra tu unidad y explica por qué la seleccionaste.

Ejercicio 8

Usando la unidad que definiste, reescribe las medidas de los cinco diámetros.

Grupo de problemas

1. Comprueba la afirmación de que, en términos de gigaelectronvoltios, la masa de un electrón es 0.000511.

2. La distancia máxima entre la Tierra y el Sol es 1.52098232×10^8 km y la distancia mínima es 1.47098290×10^8 km.[1] ¿Cuál es la distancia media entre la Tierra y el Sol en notación científica?

3. Supón que mides las siguientes masas en términos de kilogramos:

2.6×10^{21}	9.04×10^{23}
8.82×10^{23}	2.3×10^{18}
1.8×10^{12}	2.103×10^{22}
8.1×10^{20}	6.23×10^{18}
6.723×10^{19}	1.15×10^{20}
7.07×10^{21}	7.210×10^{29}
5.11×10^{25}	7.35×10^{24}
7.8×10^{19}	5.82×10^{26}

¿Qué nueva unidad puedes presentar con el fin de facilitar la discusión de las masas en este problema? Nombra tu unidad y exprésala usando alguna potencia de 10. Reescribe cada número utilizando la unidad recién definida.

[1]Nota: La órbita de la Tierra es elíptica, no circular.

Lección 13: Comparar números escritos en notación científica e interpretar la notación científica usando tecnología

Trabajo en clase

Hay un principio general que subyace en la comparación de dos números en notación científica: *Reducir todo a números enteros, si es posible.* Con este fin, recordamos dos hechos básicos.

1. Desigualdad (A): Sean x y y números y sea $z > 0$. Entonces $x < y$ si y solo si $xz < yz$.
2. La comparación de números enteros:
   a. Si dos números naturales tienen diferentes números de dígitos, entonces el que tiene más dígitos es mayor.
   b. Supongamos que dos números naturales p y q tienen el mismo número de dígitos, y, por otra parte, concuerdan dígito a dígito (empezando por la izquierda) hasta el n.º lugar. Si el dígito de p en el $(n+1)$.º lugar es mayor que el dígito correspondiente en q, entonces $p > q$.

Ejercicio 1

La galaxia Fornax Enana está a 4.6×10^5 años luz de la Tierra, mientras que Andrómeda I está a 2.430×10^6 años luz de la Tierra. ¿Cuál está más cerca de la Tierra?

Ejercicio 2

La vida promedio del leptón tau es 2.906×10^{-13} segundos, y la vida promedio del pión neutro es 8.4×10^{-17} segundos. Explica qué partícula subatómica tiene una vida promedio más larga.

Desafío exploratorio 1/Ejercicio 3

TEOREMA: Dados dos números positivos en notación científica, $a \times 10^m$ y $b \times 10^n$, si m<n, entonces $a \times 10^m < b \times 10^n$.

Prueba el teorema.

Ejercicio 4

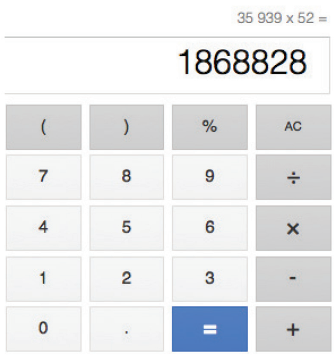
Compara 9.3×10^{28} y 9.2879×10^{28}.

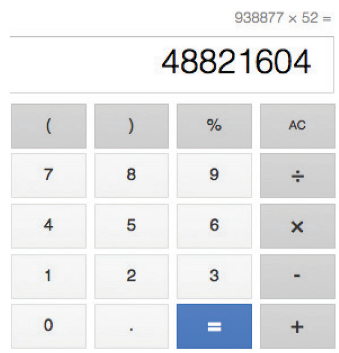
Ejercicio 5

Chris dijo que $5.3 \times 10^{41} < 5.301 \times 10^{41}$ porque 5.3 tiene menos dígitos que 5.301. Muestra que a pesar de que su respuesta es correcta, su razonamiento tiene errores. Muéstrale un ejemplo para ilustrar que su razonamiento tendría como resultado una respuesta incorrecta. Explica.

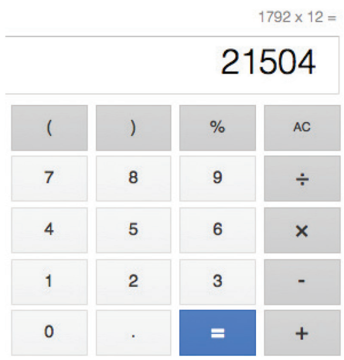
Desafío de exploración 2/Ejercicio 6

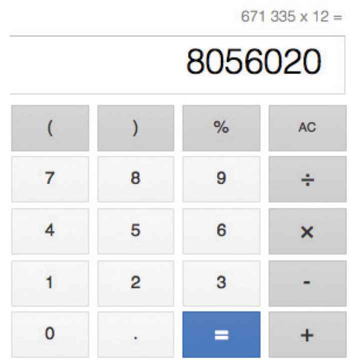
Se te ha pedido que determine el número exacto de las búsquedas de Google que se realizan cada año. La única información que se te proporciona es que hay 35,939,938,877 búsquedas cada semana. Suponiendo que sea el mismo número exacto de búsquedas cada semana para las 52 semanas en un año, ¿cuántas búsquedas totales se han realizado en un año? Tu calculadora no muestra suficientes dígitos para obtener la respuesta exacta. Por lo tanto, debes descomponer el problema en partes más pequeñas. Recuerda que no puedes aproximar una respuesta porque necesitas encontrar una respuesta exacta. Usa las siguientes capturas para ayudarte a obtener tu respuesta.





Yahoo! es otro buscador popular. Yahoo! recibe solicitudes de 1,792,671,335 búsqueda cada mes. Asumiendo que el mismo número de búsquedas se realizan cada mes, ¿cuántas búsquedas se realizan en Yahoo! cada año? Usa las capturas de abajo como ayuda para determinar la respuesta.





Grupo de problemas

1. Escribe una prueba detallada del hecho que, dados dos números en notación científica, $a \times 10^n$ y $b \times 10^n$, a<b, si y solo si $\mathrm{a} \times 10^{\mathrm{n}} < \mathrm{b} \times 10^{\mathrm{n}}$.
   a. Sean A y B dos números positivos, sin restricciones en cuanto a su tamaño. ¿Es cierto que $A \times 10^{-5} < B \times 10^5$?
   b. Ahora, si $A \times 10^{-5}$ y $B \times 10^5$ están escritos en notación científica, ¿es cierto que $A \times 10^{-5} < b \times 10^5$? Explique.

2. La masa de un neutrón es aproximadamente 1.674927×10^{-27} kg. Recuerda que la masa de un protón es 1.672622×10^{-27} kg. Explica cuál es más pesado.

3. La vida promedio del bosón Z es aproximadamente 3×10^{-25} segundos, y la vida promedio de un mesón rho neutro es aproximadamente 4.5×10^{-24} segundos.
   a. Sin usar el teorema de la lección de hoy, explica por qué el mesón rho neutro tiene una vida promedio más larga.
   b. Aproximadamente, ¿cuánto tiempo más de vida tiene un mesón rho neutro que un bosón Z?