Una historia de proporciones®

Eureka Math™

7.º grado Módulo 5

Archivo del estudiante_A

Contiene Trabajo en clase y Tareas reproducibles

Publicado por la organización sin fines de lucro Great Minds.

Impreso en EE. UU.
Este libro puede comprarse directamente en la editorial en eureka-math.org
10 9 8 7 6 5 4 3 2

G7-M5-SFA-1.1.0-07.2017

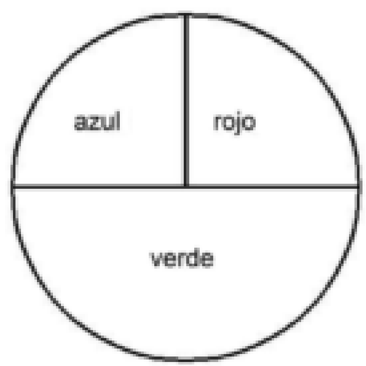
Lección 1: Experimentos aleatorios

Trabajo en clase

¿Alguna vez has oído al meteorólogo decir que hay un 40% de probabilidad de que mañana llueva o a un árbitro de fútbol decirle a un equipo que existe $50/50$ de probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda para determinar qué equipo comenzará el juego? Estos son enunciados de probabilidad. En esta lección, vas a investigar la probabilidad y qué tan probable es que algunos sucesos ocurran.

Ejemplo 1: Juego de la Ruleta

Supongamos que tú y tu amigo están a punto de jugar usando la ruleta mostrada aquí:



Reglas del juego:

1. Decidan quién irá primero.
2. Cada persona elige un color. Los jugadores no pueden elegir el mismo color.
3. Cada persona toma un turno para girar la ruleta y escribir en qué color se detiene la ruleta. El ganador es la persona cuyo color salga primero 10 veces.

Juega y recuerda escribir el color en que la ruleta se detiene en cada giro.

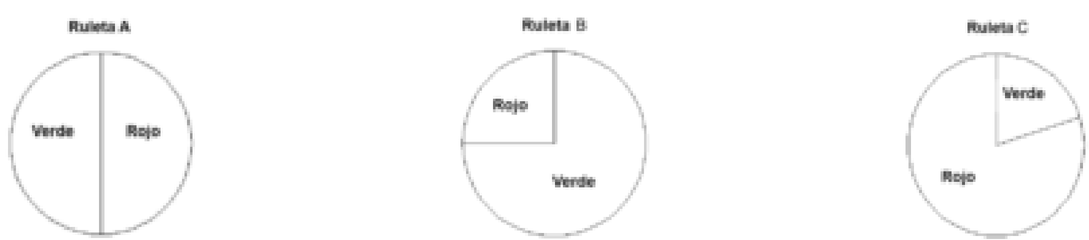
Ejercicios 1–4

1. ¿Qué color salió primero 10 veces?

2. ¿Crees que hará una diferencia quién elija primero el color?

3. ¿Qué color elegirías para tener la mejor oportunidad de ganar el juego? ¿Por qué elegirías ese color?

4. A continuación se presentan tres ruletas diferentes. ¿En qué ruleta el verde tiene más probabilidades de ganar, poca probabilidad de ganar y la misma probabilidad de ganar?



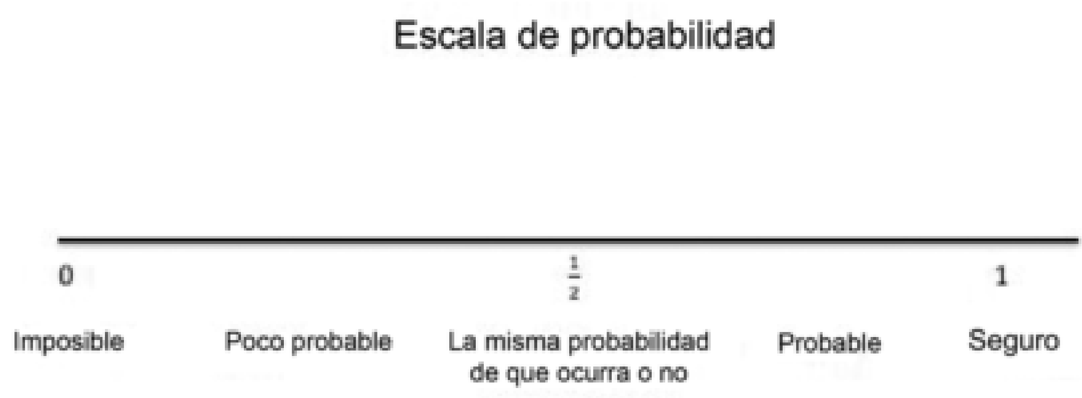
Ejemplo 2: ¿Qué es la probabilidad?

La *probabilidad* es una medida de qué tan probable es que un suceso ocurra. Una probabilidad se indica mediante un número entre 0 y 1. Algunos sucesos es seguro que ocurran, mientras que otros son imposibles. En la mayoría de los casos, la probabilidad de que ocurra un suceso está entre seguro e imposible.

Por ejemplo, considera una bolsa que contiene solo cubos rojos. Si seleccionas un cubo de la bolsa, estás seguro de elegir uno rojo. Podemos decir que la posibilidad de que un suceso ocurra tiene una probabilidad de 1. Si vamos a meter la mano en la misma bolsa de cubos, es imposible seleccionar un cubo amarillo. Un suceso imposible tiene una probabilidad de 0.

Descripción	Ejemplo	Explicación:
Algunos sucesos son *imposibles*. Estos sucesos tienen una probabilidad de $\mathbf{0}$.	Tienes una bolsa con dos cubos de color verde y seleccionas uno al azar. Seleccionar un cubo azul es un suceso imposible.	No hay manera de seleccionar un cubo azul si no hay cubos de color azul en la bolsa.
Algunos sucesos son *seguros*. Estos sucesos tienen una probabilidad de $\mathbf{1}$.	Tienes una bolsa con dos cubos de color verde y seleccionas uno al azar. Seleccionar un cubo verde es un suceso seguro.	Siempre obtendrás un cubo verde si solo hay cubos verdes en la bolsa.
Algunos sucesos se clasifican como *la misma probabilidad de que ocurran o no*. Estos sucesos tienen una probabilidad de $\frac{1}{2}$.	Tienes una bolsa con un cubo azul y un cubo rojo y escoges aleatoriamente uno. Seleccionar un cubo azul es igualmente probable que ocurra o no.	Dado que exactamente la mitad de la bolsa tiene cubos azules y exactamente la mitad de la bolsa tiene cubos rojos, hay una posibilidad de $\mathbf{50/50}$ (la misma probabilidad) de seleccionar un cubo azul y una posibilidad de $\mathbf{50/50}$ (la misma probabilidad) de NO seleccionar un cubo azul.
Algunos sucesos son más probables de ocurrir que de no ocurrir. Estos sucesos tienen una probabilidad mayor que $\mathbf{0.5}$. Estos sucesos podrían ser descritos como *probables* de ocurrir.	Si tienes una bolsa que contiene ocho cubos azules y dos cubos de color rojo y seleccionas uno al azar, es probable que obtengas un cubo azul.	A pesar de que no es seguro que obtendrás un cubo azul, un cubo azul podría ser seleccionado la mayor parte del tiempo, porque hay más cubos azules que cubos rojos.
Algunos sucesos son menos probables de ocurrir que de no ocurrir. Estos sucesos tienen una probabilidad que es menor que $\mathbf{0.5}$. Estos sucesos podrían ser descritos como *improbables* de ocurrir.	Si tienes una bolsa que contiene ocho cubos azules y dos cubos de color rojo y seleccionas uno al azar, es improbable que obtengas un cubo rojo.	A pesar de que no es imposible obtener un cubo rojo, un cubo rojo no se seleccionaría muy a menudo porque hay más cubos azules que cubos rojos.

La siguiente figura muestra la escala de probabilidad.



Ejercicios 5–10

5. Decide dónde se encuentra cada suceso en la escala anterior. Coloca la letra para cada suceso en el lugar apropiado en la escala de probabilidad.

   Suceso:

   A. Verás un dinosaurio vivo en el camino a casa desde la escuela, hoy.

   B. Una roca sólida que se dejó caer en el agua se hundirá.

   C. Un disco redondo con un lado rojo y otro amarillo caerá con el lado amarillo arriba al aterrizar.

   D. Una ruleta con cuatro partes iguales numeradas 1–4 se detendrá en el 4 en el siguiente giro.

   E. Tu nombre completo se sacará cuando se seleccione un nombre completo al azar de una bolsa que contiene los nombres completos de todos los estudiantes en tu clase.

   F. Se sacará un cubo rojo al seleccionar un cubo de una bolsa que tiene cinco cubos azules y cinco cubos rojos.

   G. Mañana la temperatura exterior será de -250 grados.

6. Diseña una ruleta de modo que la probabilidad de obtener verde al girarla sea 1.

7. Diseña una ruleta de modo que la probabilidad de obtener verde al girarla sea 0.

8. Diseña una ruleta con dos resultados en los que es igualmente probable que se detenga en las partes roja y verde.

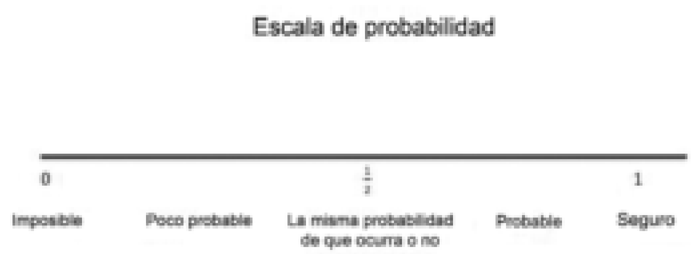
Un suceso que es imposible tiene una probabilidad de ocurrir de 0 y nunca ocurrirá, sin importar cuantas observaciones se realicen. Esto significa que en una larga secuencia de observaciones ocurrirá 0% del tiempo. Un suceso que es seguro tiene una probabilidad de ocurrir de 1 y siempre ocurrirá. Esto significa que en una larga secuencia de observaciones ocurrirá 100% del tiempo.

9. ¿Qué crees que significa que un suceso tenga la probabilidad de $\frac{1}{2}$?

10. ¿Qué crees que significa que un suceso tenga la probabilidad de $\frac{1}{4}$?

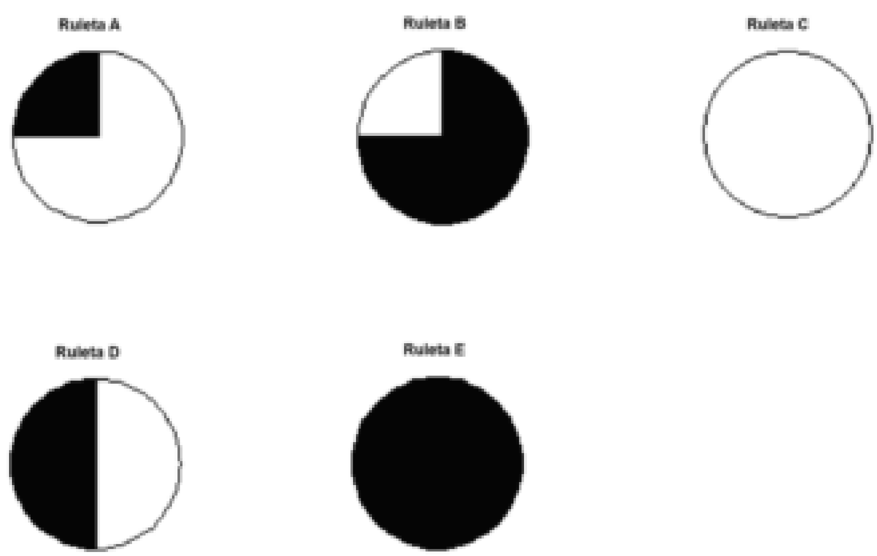
Resumen de la lección

- La *probabilidad* es una medida de qué tan probable es que un suceso ocurra.
- Una probabilidad es un número entre 0 y 1.
- La escala de probabilidad es la siguiente:



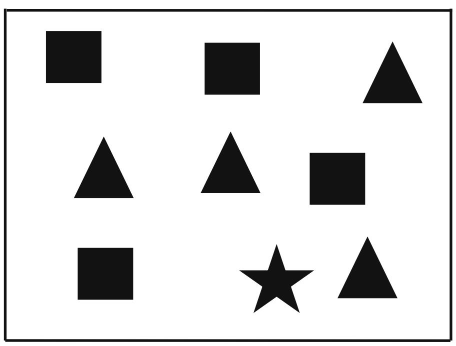
Grupo de problemas

1. Relaciona cada ruleta a continuación con las palabras *imposible, improbable, la misma probabilidad de ocurrir o de no ocurrir, probable y seguro* para describir la posibilidad de que salga negro en la ruleta.



2. Decide si cada uno de los siguientes sucesos es imposible, improbable, la misma probabilidad de que ocurra o no, probable o seguro de que ocurra.
   a. Una vocal será tomada cuando una letra es seleccionada al azar de la palabra *lieu.*
   b. Una vocal será tomada cuando una letra sea seleccionada al azar de la palabra *math.*
   c. Un cubo azul se toma de una bolsa que contiene solo cinco cubos azules y cinco cubos negros.
   d. Un cubo rojo se toma de una bolsa de 100 cubos rojos.
   e. Un cubo rojo se toma de una bolsa de 10 cubos rojos y 90 azules.

3. Una figura será elegida al azar de la caja que se muestra a continuación. Decide dónde se encuentra cada suceso en la escala de probabilidad. Después, coloca la letra de cada suceso en el lugar apropiado en la escala de probabilidad.



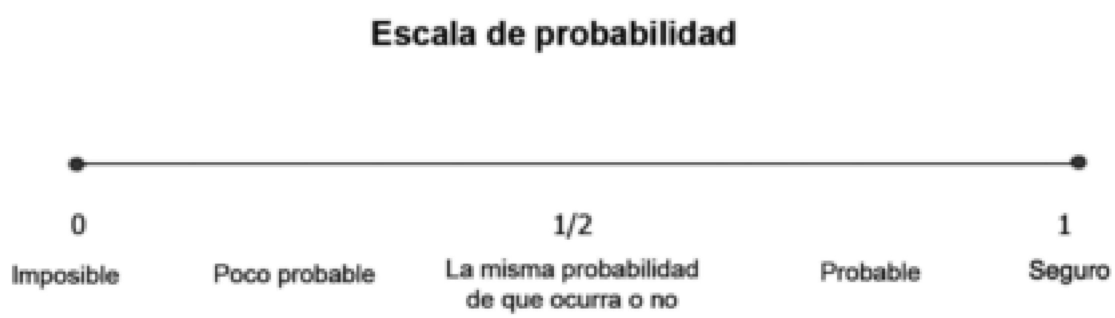
Suceso:

A. Se saca un círculo.

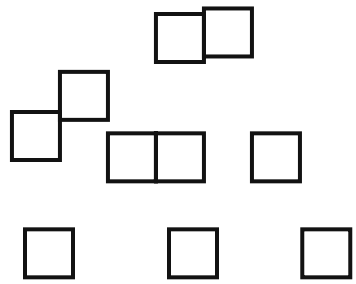
B. Se saca un cuadrado.

C. Se saca una estrella.

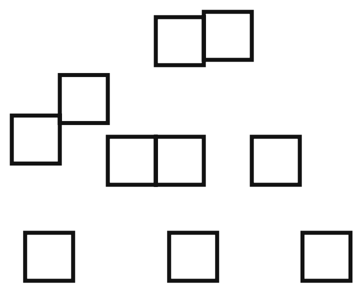
D. Se saca una forma que no es un cuadrado.



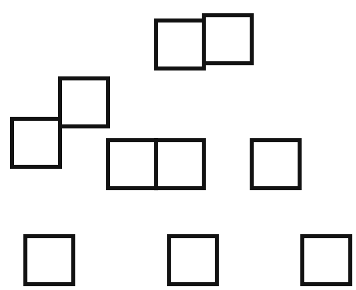
4. Colorea los cuadrados a continuación de modo que la probabilidad de elegir un cuadrado azul o amarillo sea la misma.



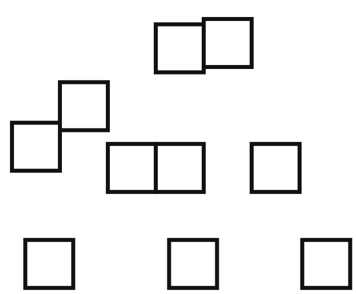
5. Colorea los cuadrados a continuación de modo que sea probable, pero no seguro elegir un cuadrado azul de la bolsa.



6. Colorea los cuadrados a continuación de modo que sea improbable, pero no imposible elegir un cuadrado azul de la bolsa.



7. Colorea los cuadrados a continuación de modo que sea imposible elegir un cuadrado azul de la bolsa.

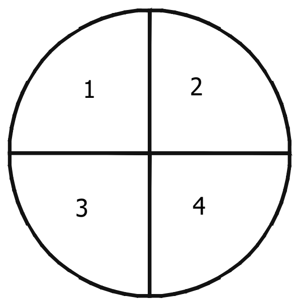


Lección 2: Estimar las probabilidades recolectando datos

Trabajo en clase

Ejercicios 1–8: Juego del carnaval

En el carnaval de la escuela, hay un juego en el que los estudiantes hacen girar una gran ruleta. La ruleta tiene cuatro secciones iguales numeradas 1–4 como se muestra a continuación. Para jugar, un estudiante hace girar la ruleta dos veces y suma los dos números que salen en la ruleta. Si la suma es mayor que o igual a 5, el estudiante gana un premio.



Juega con tu compañero 15 veces. Registra el resultado de cada giro en la tabla siguiente.

Giro	Resultados del 1° giro	Resultados del 2° giro	Suma
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			

1. En los 15 giros, ¿cuántas veces la suma fue mayor que o igual a 5?

2. ¿Qué suma se produjo con más frecuencia?

3. ¿Qué suma se produjo con menos frecuencia?

4. Si los estudiantes jugaran varias veces, ¿qué fracción de juegos ganarían? Explica tu respuesta.

5. Nombra una suma que sería imposible de conseguir durante el juego.

6. ¿Qué suceso es seguro que ocurra durante el juego?

Cuando estabas girando la ruleta y registrando los resultados, estabas realizando un *experimento aleatorio*. Se pueden utilizar los resultados de un experimento aleatorio para estimar la probabilidad de un suceso. En el Ejercicio 1, giraste la ruleta 15 veces y contaste cuántas veces la suma fue mayor o igual a 5. Un estimado de la probabilidad de una suma mayor o igual a 5 es

$$P(\text{suma } \geq 5) = \frac{\text{Número de ocurrencias observadas del suceso}}{\text{Número total de observaciones}}.$$

7. Basándote en tu experiencia del juego, ¿cuál es tu estimado de la probabilidad de obtener una suma de 5 o más?

8. Basándote en tu experiencia del juego, ¿cuál es tu estimado de la probabilidad de obtener una suma de 5 exactamente?

Ejemplo 2: Galletas de animales

Un estudiante trajo un gran frasco de galletas de animales para compartir con los estudiantes en la clase. En lugar de contar y clasificar todos los diferentes tipos de galletas, el estudiante sacó al azar 20 galletas y obtuvo el siguiente recuento de los diferentes tipos de galletas de animales. Estima la probabilidad de sacar una cebra.

Animal	Número seleccionado
León	2
Camello	1
Mono	4
Elefante	5
Cebra	3
Pingüino	3
Tortuga	2
	Total 20

Ejercicios 9 a 15

Si un estudiante sacó al azar una galleta de un frasco grande:

9. ¿Cuál es tu estimado de la probabilidad de sacar un león?

10. ¿Cuál es tu estimado de la probabilidad de sacar un mono?

11. ¿Cuál es tu estimado de la probabilidad de sacar un pingüino o un camello?

12. ¿Cuál es tu estimado de la probabilidad de sacar un conejo?

13. ¿Existe el mismo número de cada tipo de galleta de animal en el frasco? Explica tu respuesta.

14. ¿Si el estudiante saca al azar otras 20 galletas de animales, se producirían los mismos resultados? ¿Por qué sí o por qué no?

15. Si hay 500 galletas de animales en el frasco, aproximadamente ¿cuántos elefantes hay en el frasco? Explica tu respuesta.

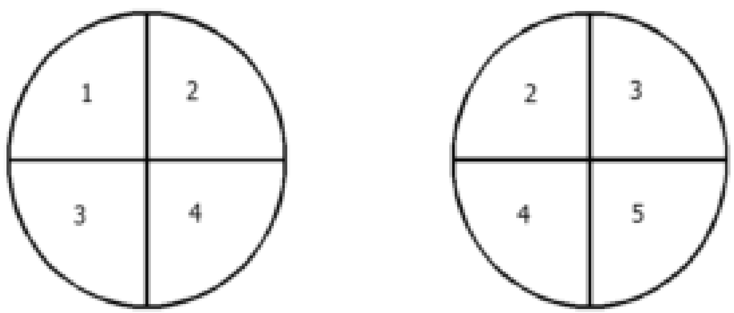
Resumen de la lección

Un estimado para calcular la probabilidad de que ocurra un suceso es

$$P(\text{que suceso ocurra}) = \frac{\text{Número de ocurrencias observadas del suceso}}{\text{Número total de observaciones}}.$$

Grupo de problemas

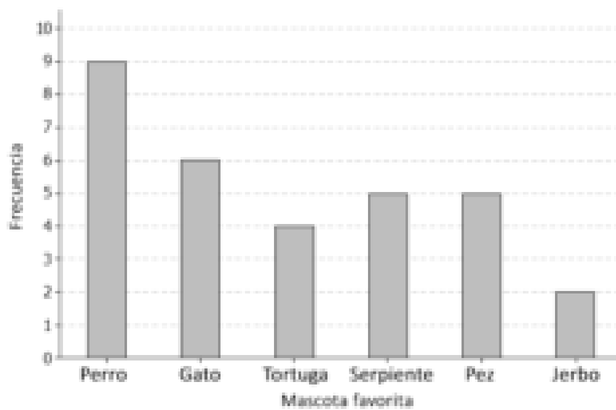
1. Juega usando las dos ruletas a continuación. Gira cada ruleta una vez y después multiplica los resultados. Si el resultado es menor o igual a 8, ganas el juego. Juega 15 veces y escribe tus resultados en la tabla a continuación. Después, responde las siguientes preguntas.



Giro	Resultados del 1° giro	Resultados del 2° giro	Producto
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			

a. ¿Cuál es tu estimado de la probabilidad de obtener un producto de 8 o menos?
b. ¿Cuál es tu estimado de la probabilidad de obtener un producto de más de 8?
c. ¿Cuál es tu estimado de la probabilidad de obtener un producto de 8 exactamente?
d. ¿Cuál es el producto más probable para este juego?
e. Si juegas otras 15 veces, ¿obtendrás los mismos resultados? Explica.

2. Un estudiante de séptimo grado encuestó a estudiantes en su escuela. Les preguntó cuáles eran sus mascotas favoritas. A continuación se muestra una gráfica de barras que muestra los resultados de la encuesta.



Utiliza los resultados de la encuesta para contestar las siguientes preguntas.

a. ¿Cuántos estudiantes respondieron la pregunta de la encuesta?
b. ¿Cuántos estudiantes dijeron que su mascota favorita era una serpiente?

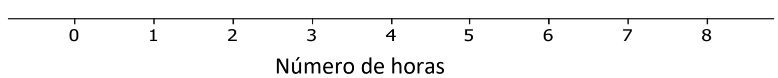
Ahora, supongamos que un estudiante es seleccionado al azar y se le pregunta cuál es su mascota favorita.

c. ¿Cuál es tu estimado de la probabilidad de que el estudiante diga que un perro es su mascota favorita?
d. ¿Cuál es tu estimado de la probabilidad de que el estudiante diga que un jerbo es su mascota favorita?
e. ¿Cuál es tu estimado de la probabilidad de que el estudiante diga que una rana es su mascota favorita?

3. Una estudiante de séptimo grado encuestó a 25 estudiantes en su escuela. Les preguntó cuántas horas a la semana se dedican a practicar un deporte o juego al aire libre. Los resultados se enumeran en la tabla siguiente.

<table>
<tr><th>Número de horas</th><th>Conteo</th><th>Frecuencia</th></tr>
<tr><td>0</td><td>| | |</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1</td><td>| | | |</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>~~||||~~</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>~~||||~~ | |</td><td>7</td></tr>
<tr><td>4</td><td>| | |</td><td>3</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td>0</td></tr>
<tr><td>6</td><td>| |</td><td>2</td></tr>
<tr><td>7</td><td></td><td>0</td></tr>
<tr><td>8</td><td>|</td><td>1</td></tr>
</table>

a. Dibuja un diagrama de puntos con los resultados.



Supongamos que un estudiante será seleccionado al azar.

b. ¿Cuál es tu estimado de la probabilidad de que el estudiante responda 3 horas?

c. ¿Cuál es tu estimado de la probabilidad de que el estudiante responda 8 horas?

d. ¿Cuál es tu estimado de la probabilidad de que el estudiante responda 6 horas o más?

e. ¿Cuál es tu estimado de la probabilidad de que el estudiante responda 3 horas o menos?

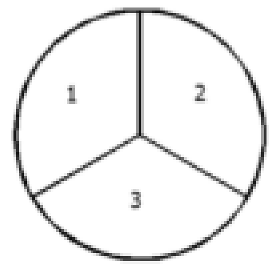
f. Si otros 25 estudiantes se encuestaran, ¿crees que darían los mismos resultados? Explica tu respuesta.

g. Si hay 200 estudiantes en la escuela, ¿cuál es tu estimado para el número de estudiantes que dicen que practican un deporte o juego al aire libre 3 horas por semana? Explica tu respuesta.

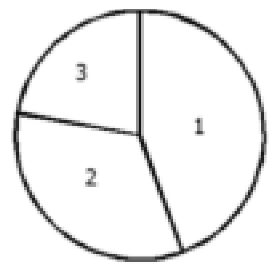
4. Un estudiante juega con una de las ruletas a continuación. La tabla muestra los resultados de 15 giros. ¿Qué ruleta usó el estudiante? Justifica tu respuesta.

Giro	Resultados
1	1
2	1
3	2
4	3
5	1
6	2
7	3
8	2
9	2
10	1
11	2
12	2
13	1
14	3
15	1

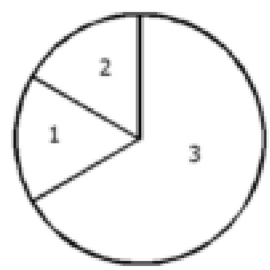
Ruleta A



Ruleta B



Ruleta C



Lección 3: Experimentos aleatorios con resultados equiprobables

Trabajo en clase

Ejercicios 1-6

Jamal, un estudiante de séptimo grado, quiere diseñar un juego que consiste en lanzar vasos de papel. Jamal tira un vaso de papel cinco veces y registra el resultado de cada lanzamiento. Un *resultado* es el resultado de un único ensayo del experimento.

Estos son los resultados de cada lanzamiento:

Jamal observó que el vaso de papel podría aterrizar de una de tres maneras: de lado, boca arriba o boca abajo. La colección de estos tres resultados se llama el espacio muestral del experimento. El *espacio muestral* de un experimento es el conjunto de todos los posibles resultados de ese experimento.

Por ejemplo, el espacio muestral cuando se lanza una moneda es cara o cruz.

El espacio muestral para sacar un cubo de color de una bolsa que tiene 3 cubos rojos, 2 azules, 1 amarillo y 4 verdes es rojo, azul, amarillo, verde.

Para cada uno de los siguientes experimentos aleatorios, enumera el espacio muestral (es decir, todos los resultados posibles).

1. Sacar un cubo de color de una bolsa con 2 verdes, 1 rojo, 10 azules y 3 negros.

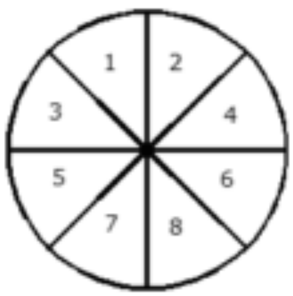
2. Lanzar una lata de sopa vacía para ver cómo aterriza.

3. Hacer un tiro libre en un partido de baloncesto.

4. Lanzar un dado con los números 1–6 en sus caras.

5. Seleccionar una letra de la palabra *probability.*

6. Hacer girar irar la ruleta:



Ejemplo 2: Resultados equiprobables

El espacio muestral para el lanzamiento del vaso de papel era de lado, boca arriba y boca abajo.

Los resultados de un experimento son equiprobables cuando la probabilidad de cada resultado es igual.

Lanza el vaso de papel 30 veces y registra los resultados de cada lanzamiento.

Lanzamiento	Resultado
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	
25	
26	
27	
28	
29	
30	

Ejercicios 7–12

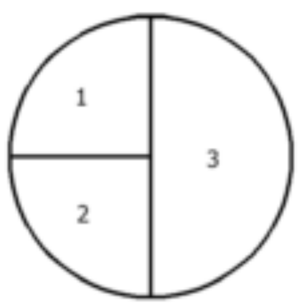
7. Utilizando los resultados de tu experimento, ¿cuál es tu estimado de la probabilidad de que un vaso de papel aterrice de lado?

8. Utilizando los resultados de tu experimento, ¿cuál es tu estimado de la probabilidad de que un vaso de papel de aterrice boca abajo?

9. Utilizando los resultados de tu experimento, ¿cuál es tu estimado de la probabilidad de que un vaso de papel aterrice boca arriba?

10. Basándote en tus resultados, ¿cree que los tres resultados son equiprobables?

11. Usa la ruleta a continuación y responde las siguientes preguntas.



   a. ¿ Los sucesos de girar la ruleta y que caiga en 1 o 2 son equiprobables?

b. ¿ Los sucesos de girar la ruleta y que caiga en 2 o 3 son equiprobables?

c. ¿Cuántas veces predijiste que la ruleta caería en cada sección después de 100 giros?

12. Dibuja una ruleta que tenga 3 secciones que sean equiprobables de ocurrir cuando se gira la ruleta. ¿Cuántas veces crees que la ruleta caerá en cada sección después de 100 giros?

Resumen de la lección

Un *resultado* es el resultado de una única observación de un experimento.

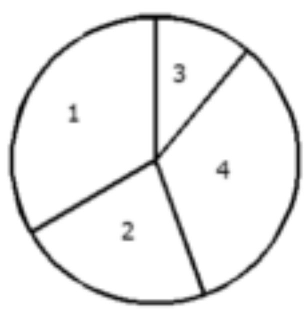
El *espacio muestral* de un experimento es el conjunto de todos los posibles resultados de ese experimento.

Los resultados de un experimento son *equiprobables* cuando la probabilidad de cada resultado es igual.

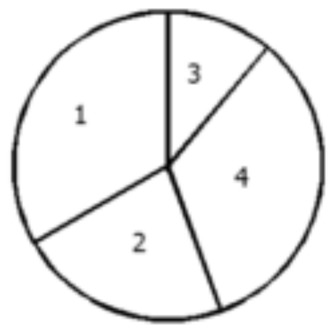
Supongamos que una bolsa de crayones contiene 10 verdes, 10 rojos, 10 amarillos, 10 naranjas y 10 púrpuras. Si se selecciona un crayón de la bolsa y se observa el color, el resultado es el color que se eligió. El *espacio muestral* serán los colores: verde, rojo, amarillo, naranja y púrpura. Cada color es *equiprobable* ya que cada color tiene la misma probabilidad de ser elegido.

Grupo de problemas

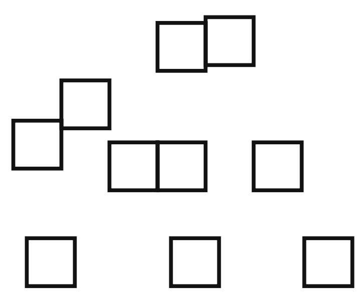
1. Para cada uno de los siguientes experimentos aleatorios, enumera el espacio muestral (todos los resultados posibles).
   a. Lanzar un dado de 4 lados con los números 1–4 en las caras del dado
   b. Seleccionar una letra de la palabra *mathematics*
   c. Seleccionar una canica de una bolsa con 50 canicas negras y 45 canicas anaranjadas
   d. Seleccionar un número de los números pares de 2–14, incluyendo 2 y 14
   e. Girar la ruleta a continuación:



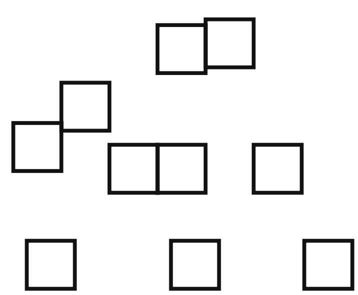
2. Para cada uno de los siguientes, decide si los dos resultados mencionados son equiprobables. Justifica tu respuesta.
   a. Sacar un 1 o 2 cuando lanzas un cubo de 6 caras con los números del 1 al 6.
   b. Seleccionar la letra A o K de la palabra *take.*
   c. Seleccionar una canica negra o anaranjada de una bolsa que contiene 50 canicas negras y 45 anaranjadas.
   d. Seleccionar un 4 o un 8 de los números pares 2–14, incluyendo 2 y 14.
   e. Sacar un 1 o un 3 al girar la ruleta a continuación.



3. Colorea los cuadrados de abajo de modo que sea equiprobable elegir un cuadrado azul o amarillo.



4. Colorea los cuadrados de abajo de modo que tengas más probabilidades de elegir un cuadrado azul que amarillo.



5. Estás jugando con la ruleta a continuación. El juego requiere que hagas girar la ruleta dos veces. Por ejemplo, un resultado podría ser color amarillo en el primer giro y rojo en el segundo giro. Enumera el espacio muestral (todos los resultados posibles) para los dos giros.

6. Enumera el espacio muestral para el experimento aleatorio de lanzar una moneda dos veces.

Lección 4: Calcular probabilidades para experimentos aleatorios con resultados equiprobables

Trabajo en clase

Ejemplos: Probabilidad teórica

En una lección anterior, se vio que, para encontrar un estimado de la probabilidad de un suceso en un experimento aleatorio, se divide

$$P(\text{suceso}) = \frac{\text{Número de ocurrencias observadas del suceso}}{\text{Número total de observaciones}}.$$

Tu maestro tiene una bolsa con algunos cubos de colores amarillo, verde, azul y rojo. Los cubos son idénticos excepto por su color. Tu maestro llevará a cabo un experimento aleatorio sacando un cubo al azar con reemplazo en la bolsa. Registra el resultado de cada sorteo en la tabla siguiente.

Prueba	Resultado
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

1. Basándote en 20 ensayos, estima la probabilidad de
   a. Elegir un cubo amarillo.

   b. Elegir un cubo verde.

   c. Elegir un cubo rojo.

   d. Elegir un cubo azul.

2. Si hay 40 cubos en la bolsa, ¿cuántos cubos de cada color hay en la bolsa? Explica.

3. Si el maestro tuviera que sacar al azar otros 20 cubos, uno a la vez y con reemplazo en la bolsa, ¿verías exactamente los mismos resultados? Explica.

4. Encuentra la fracción de cada color de los cubos en la bolsa.

   Amarillo

   Verde

   Rojo

   Azul

Cada fracción es la *probabilidad teórica* de elegir un color particular de un cubo cuando un cubo se saca al azar de la bolsa.

Cuando todos los posibles resultados de un experimento son equiprobables, la probabilidad de cada resultado es

$$P(\text{resultado}) = \frac{1}{\text{Número de posibles resultados}}.$$

Un suceso es un conjunto de resultados, y cuando los resultados son equiprobables, la probabilidad teórica de un suceso puede ser expresada como

$$P(\text{suceso}) = \frac{\text{Número de resultados favorables}}{\text{Número de posibles resultados}}.$$

La probabilidad teórica de sacar un cubo azul es

$$P(\text{azul}) = \frac{\text{Número de cubos azules}}{\text{Número total de cubos}} = \frac{10}{40}.$$

5. ¿Cada color tiene la misma probabilidad de ser elegido? Explica tu respuesta.

6. ¿De qué manera las probabilidades teóricas de la elección de cada color del Ejercicio 4 se comparan con las probabilidades experimentales que encontraste en el Ejercicio 1?

7. Un experimento consistió en lanzar una moneda de cinco centavos (*nickel)* y una de diez centavos (*dime*). El primer paso para encontrar la probabilidad teórica de obtener una cara en el *nickel* y una cara en el *dime* es hacer una lista del espacio muestral. Para este experimento, completa el espacio muestral a continuación.

Nickel	Dime

¿Cuál es la probabilidad de lanzar y obtener dos caras?

Ejercicios 1–4

1. Considera un experimento aleatorio de lanzar un dado de seis caras con los números 1-6 en las caras.
   a. ¿Cuál es el espacio muestral? Enumera la probabilidad de cada resultado en el espacio muestral.

   b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número impar?

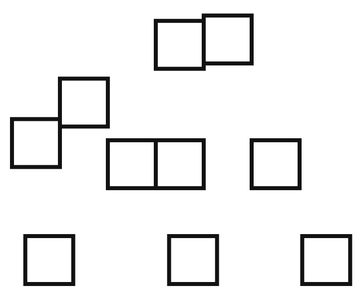
   c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número menor a 5?

2. Considera un experimento aleatorio de seleccionar una letra de la palabra *number.*
   a. ¿Cuál es el espacio muestral? Enumera la probabilidad de cada resultado en el espacio muestral.

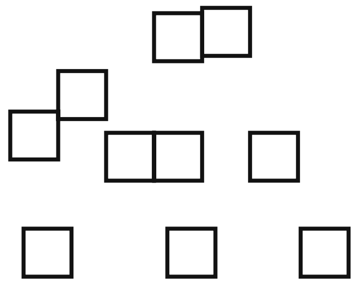
   b. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una vocal?

   c. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar la letra z?

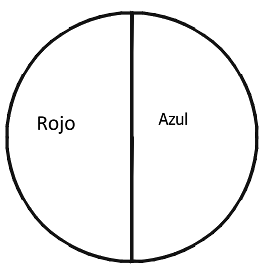
3. Considera un experimento aleatorio de seleccionar un cuadrado de una bolsa de 10 cuadrados.
   a. Colorea los cuadrados abajo para que la probabilidad de seleccionar un cuadrado azul sea $\frac{1}{2}$.

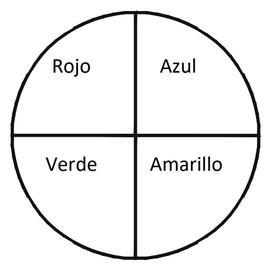


b. Colorea los cuadrados abajo para que la probabilidad de seleccionar un cuadrado azul sea $\frac{4}{5}$.



4. Los estudiantes están en un juego que requiere girar dos ruletas que se muestran a continuación. Un estudiante gana el juego si ambos giros caen en rojo. ¿Cuál es la probabilidad de ganar el juego? Recuerda primero enumerar el espacio muestral y la probabilidad de cada resultado en el espacio muestral. Hay ocho posibles resultados en este experimento aleatorio.





Resumen de la lección

Cuando todos los posibles resultados de un experimento son equiprobables, la probabilidad de cada resultado es

$$P(\text{resultado}) = \frac{1}{\text{Número de posibles resultados}}$$

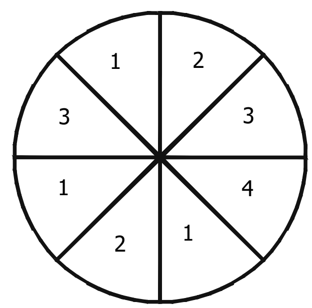
Un suceso es un conjunto de resultados y cuando todos los resultados son equiprobables, la probabilidad teórica de un suceso puede ser expresada como

$$P(\text{suceso}) = \frac{\text{Número de resultados favorables}}{\text{Número de posibles resultados}}$$

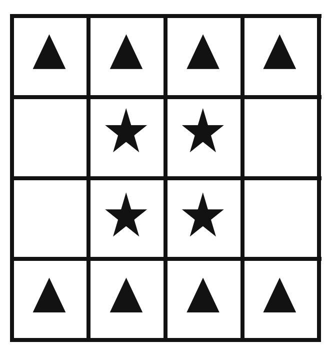
Grupo de problemas

1. En una clase de séptimo grado de 28 estudiantes, hay 16 niñas y 12 niños. Si un estudiante es elegido al azar para ganar un premio, ¿cuál es la probabilidad de que se elija a una niña?

2. Un experimento consiste en hacer girar la ruleta una vez.
   a. Encuentra la probabilidad de que caiga en 2.
   b. Encuentra la probabilidad de que caiga en 1.
   c. ¿Es equiprobable que caiga en cada sección de la ruleta? Explica.



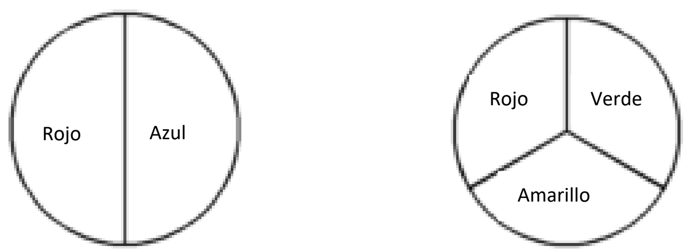
3. Un experimento consiste en escoger al azar un cuadrado del pizarrón que se muestra a continuación.
   a. Encuentra la probabilidad de elegir un triángulo.
   b. Encuentra la probabilidad de elegir una estrella.
   c. Encuentra la probabilidad de elegir un cuadrado vacío.
   d. Encuentra la probabilidad de elegir un círculo.



4. Los estudiantes de séptimo grado están jugando un juego en el que seleccionan al azar dos números enteros 0-9, para formar un número de dos dígitos. El mismo número entero podría ser seleccionado dos veces.
   a. Enumera el espacio muestral para este experimento aleatorio. Enumera la probabilidad de cada resultado en el espacio muestral.
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que el número formado esté entre 90 y 99?
   c. ¿Cuál es la probabilidad de que el número formado sea divisible entre 5?
   d. ¿Cuál es la probabilidad de que el número formado sea un factor de 64?

5. Un experimento aleatorio consiste en lanzar una moneda al aire y lanzar un dado con los números 1-6 en las caras del cubo.
   a. Enumera el espacio muestral de este experimento aleatorio. Enumera la probabilidad de cada resultado en el espacio muestral.
   b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara en la moneda y el número 3 en el dado?
   c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cruz en la moneda y un número par en el dado?

6. Un experimento de probabilidad consiste en hacer girar las dos ruletas a continuación.



   a. Enumera el espacio muestral y la probabilidad de cada resultado.
   b. Encuentra la probabilidad del suceso de obtener rojo en la primera ruleta y rojo en la segunda ruleta.
   c. Encuentra la probabilidad de obtener rojo al menos en una de las ruletas.

Lección 5: Experimentos aleatorios con resultados que no son equiprobables

Trabajo en clase

En las lecciones anteriores, aprendiste que cuando los resultados en un espacio muestral son equiprobables, la probabilidad de un suceso es el número de resultados en el suceso dividido entre el número de resultados en el espacio muestral. Sin embargo, cuando los resultados del espacio muestral *no* son equiprobables, tenemos que adoptar un enfoque diferente.

Ejemplo 1

Cuando Jenna va al mercado al aire libre, suele comprar plátanos. El número de plátanos que podría comprar y sus probabilidades se muestran en la siguiente tabla.

Número de plátanos	0	1	2	3	4	5
Probabilidad	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3

a. ¿Cuál es la probabilidad de que Jenna compre exactamente 3 plátanos?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que Jenna no compre ningún plátano?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que Jenna compre más de 3 plátanos?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que Jenna compre al menos 3 plátanos?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que Jenna no compre exactamente 3 plátanos?

Observa que la suma de las probabilidades en la tabla es un entero $(0.1 + 0.1 + 0.1 + 0.2 + 0.2 + 0.3 = 1)$. Esto siempre es cierto; cuando sumamos las probabilidades de todos los posibles resultados, el resultado es siempre 1. Por lo tanto, tomar 1 y restar la probabilidad del suceso nos da la probabilidad de que algo *no* ocurra.

Ejercicios 1–2

El esposo de Jenna, Rick, está preocupado por su dieta. En un día cualquiera, come 0, 1, 2, 3, o 4 porciones de frutas y verduras. Las probabilidades se dan en la siguiente tabla.

Número de porciones de frutas y verduras	0	1	2	3	4
Probabilidad	0.08	0.13	0.28	0.39	0.12

1. Para un determinado día, calcula la probabilidad de que Rick coma
   a. Dos porciones de frutas y verduras

   b. Más de dos porciones de frutas y verduras

   c. Al menos dos porciones de frutas y verduras

2. Encuentra la probabilidad de que Rick no coma exactamente dos porciones de frutas y verduras.

Ejemplo 2

Luis trabaja en una oficina y suena el teléfono de vez en cuando. El número posible de llamadas telefónicas que recibe en una tarde y sus probabilidades se dan en la siguiente tabla.

Número de llamadas telefónicas	0	1	2	3	4
Probabilidad	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

a. Encuentra la probabilidad de que Luis reciba 3 o 4 llamadas telefónicas.

b. Encuentra la probabilidad de que Luis reciba menos de 2 llamadas telefónicas.

c. Encuentra la probabilidad de que Luis reciba 2 o menos llamadas telefónicas.

d. Encuentra la probabilidad de que Luis no reciba 4 llamadas telefónicas.

Ejercicios 3–7

Cuando Jenna va al mercado al aire libre, también suele comprar un poco de brócoli. El número posible de cabezas de brócoli que compra y las probabilidades se dan en la siguiente tabla.

Número de cabezas de brócoli	0	1	2	3	4
Probabilidad	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

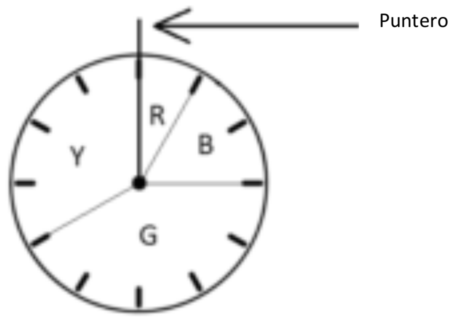
3. Encuentra la probabilidad de que Jenna:
   a. Compre exactamente 3 cabezas de brócoli

   b. No compre exactamente 3 cabezas de brócoli

   c. Compre más de 1 cabeza de brócoli

   d. Compre al menos 3 cabezas de brócoli

El siguiente diagrama muestra una ruleta diseñada como un reloj. Los sectores de la ruleta son de color rojo (R), azul (B), verde (G) y amarillo (Y).



4. Escribe tus respuestas como fracciones en su mínima expresión, encuentra la probabilidad de que el puntero se detenga en los siguientes colores.
   a. Rojo:

   b. Azul:

   c. Verde:

   d. Amarillo:

5. Completa la tabla de probabilidades a continuación.

Color	Rojo	Azul	Verde	Amarillo
Probabilidad				

6. Encuentra la probabilidad de que el puntero se detenga en la región azul o verde.

7. Encuentra la probabilidad de que el puntero no se detenga en la región verde.

Resumen de la lección

En un experimento aleatorio, donde no se sabe si los resultados son equiprobables, no necesariamente se aplica la fórmula para la probabilidad de un suceso:

$$P(\text{suceso}) = \frac{\text{Número de posibles en el suceso}}{\text{Número de resultados en el espacio muestral}}.$$

Por ejemplo:

- Para encontrar la probabilidad de que la puntuación sea mayor que 3, suma las probabilidades de todos los resultados que son mayores que 3.
- Para encontrar la probabilidad de no obtener una puntuación de 3, calcula $1 - (\text{la probabilidad de obtener } 3)$.

Grupo de problemas

1. Las Gator Girls es un equipo de fútbol. El número posible de goles que las Gator Girls anotarán en un juego y sus probabilidades se muestran en la siguiente tabla.

Número de Goles	0	1	2	3	4
Probabilidad	0.22	0.31	0.33	0.11	0.03

Encuentra la probabilidad de que las Gator Girls:

a. Anoten más de dos goles

b. Anoten al menos dos goles

c. No anoten exactamente 3 goles

2. El siguiente diagrama muestra una ruleta. El puntero se gira y el jugador recibe un premio de acuerdo al color en el que se detiene el puntero.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el puntero se detenga en la región roja?

b. Completa el siguiente cuadro que muestra las probabilidades de los tres resultados posibles.

Color	Rojo	Verde	Azul
Probabilidad			

c. Encuentra la probabilidad de que el puntero se detenga en verde o azul.

d. Encuentra la probabilidad de que el puntero no se detenga en verde.

3. Wayne preguntó a todos los estudiantes de su clase cuántos hermanos (hermanos y hermanas) tenían. Los resultados del estudio se muestran en la siguiente tabla. (Wayne se incluyó a sí mismo en los resultados).

Numero de hermanos	0	1	2	3	4
Número de estudiantes	4	5	14	6	3

(Nota: La tabla nos dice que 4 estudiantes no tenían hermanos, 5 estudiantes tenían un hermano, 14 estudiantes tenían dos hermanos y así sucesivamente).

a. ¿Cuántos estudiantes hay en la clase de Wayne, incluyendo a Wayne?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante seleccionado al azar no tenga hermanos? Escribe tu respuesta como una fracción en su mínima expresión.

c. La siguiente tabla muestra el número posible de hermanos y de las probabilidades de cada número. Completa la tabla escribiendo las probabilidades como fracciones en su mínima expresión.

Numero de hermanos	0	1	2	3	4
Probabilidad					

d. Escribe tus respuestas como fracciones en su mínima expresión, encuentra la probabilidad de que el estudiante:

i. Tenga menos de dos hermanos

ii. Tenga dos o menos hermanos

iii. No tenga exactamente un hermano

Lección 6: Usar diagramas de árbol para representar un espacio muestral y calcular las probabilidades

Trabajo en clase

Supón que una niña asiste a un jardín de niños, donde los estudiantes están estudiando los colores primarios. Para ayudar a enseñar las habilidades del calendario, el maestro pide a cada estudiante que tenga un calendario en su cajita. En cada uno de los cuatro días que los estudiantes están aprendiendo los colores primarios en clase, los estudiantes colocan un punto de color en sus calendarios: azul, amarillo o rojo. Cuando los cuatro días de la semana escolar hayan pasado (lunes a jueves), ¿cómo se verá el calendario de la niña?

Un resultado sería cuatro puntos azules si el estudiante eligió azul cada día. Pero ten en cuenta que el primer día (lunes) podría ser de color azul y el día siguiente (martes) podría ser de color amarillo y el miércoles podría ser de color azul y el jueves podría ser de color rojo. O tal vez el lunes y martes podrían ser de color amarillo, el miércoles podría ser de color azul y el jueves podría ser de color rojo. O tal vez los lunes, martes y el miércoles podrían ser de color azul y el jueves podría ser de color rojo y así sucesivamente.

Aunque esto parezca difícil de seguir ahora, ¡sólo hemos mencionado 3 de los 81 resultados posibles en términos de los cuatro días de colores! ¡Enumerar los otros 78 resultados tomaría varias páginas! En lugar de mostrar los resultados de la manera descrita anteriormente (particularmente cuando la situación tiene varias etapas, como los múltiples días en el caso anterior), a menudo utilizamos un *diagrama de árbol* para mostrar todos los posibles resultados visualmente. Además, cuando los resultados de cada etapa son el resultado de un experimento aleatorio, los diagramas de árbol son útiles para calcular probabilidades.

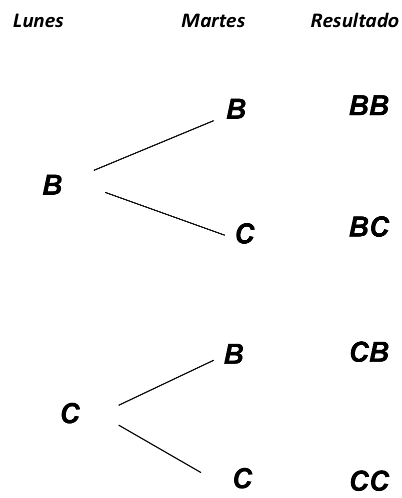
Ejemplo 1: Dos noches de juegos

Imagina que una familia decide jugar un juego cada noche. Todos ellos están de acuerdo en usar un dado tetraédrico (es decir, una pirámide de cuatro lados donde cuatro de los resultados posibles tienen la misma probabilidad—ve la imagen al final de la lección) cada noche para determinar al azar si van a jugar un juego de mesa (B) o un juego de cartas (C). El diagrama de árbol que indica los posibles resultados generales durante dos noches consecutivas se desarrolla a continuación.

Para hacer un diagrama de árbol, primero presenta todas las posibilidades de la primera etapa (en este caso, el lunes).

Lunes	*Martes*	*Resultado*
B		
C		

Después, a partir de *cada* rama de la primera etapa, conecta todas las posibilidades de la segunda etapa (martes).



Nota: Si la situación tiene más de dos etapas, este proceso se repite hasta que se hayan presentado todas las etapas.

a. Si BB representa dos noches consecutivas de juegos de mesa, ¿qué representa CB?

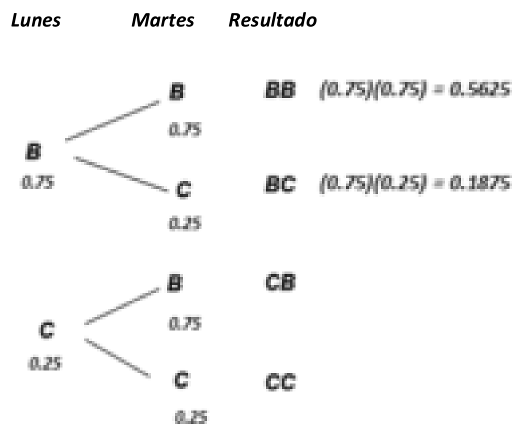
b. Enumera los resultados donde exactamente un juego de mesa se juega en dos días. ¿Cuántos resultados había?

Ejemplo 2: Dos noches de juegos (con probabilidades)

En el Ejemplo 1, el resultado de cada noche es el resultado de un experimento aleatorio (tirar el dado tetraédrico). Por lo tanto, hay una probabilidad asociada con el resultado de cada noche.

Al multiplicar las probabilidades de los resultados de cada etapa, podemos obtener la probabilidad para cada "rama del árbol". En este caso, podemos calcular la probabilidad de cada uno de nuestros cuatro resultados: BB, BC, CB y CC.

Para esta familia, un juego de cartas se jugará si el dado cae mostrando un valor de 1 y un juego de mesa se jugará si el dado cae mostrando un valor de 2, 3 o 4. Esto hace que la probabilidad de un juego de mesa (B) en una noche determinada sea 0.75.



a. Se muestran las probabilidades para dos de los cuatro resultados. Ahora, calcula las probabilidades de los dos resultados restantes.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente una noche de juego de mesa en las dos noches?

Ejercicios 1–3 Dos niños

Dos amigos se encuentran en una tienda de abarrotes y observan que una familia vecina le dio la bienvenida a su segundo hijo. Resulta que los dos hijos de esta familia son niñas y no son gemelas. Uno de los amigos tiene curiosidad acerca de cuáles son las posibilidades de tener 2 niñas en los primeros 2 nacimientos de una familia. Supongamos que, por cada nacimiento, la probabilidad de un niño es 0.5 y la probabilidad una niña también es 0.5.

1. Dibuja un diagrama de árbol que demuestre los cuatro resultados posibles de nacimiento en una familia con 2 hijos (no gemelos). Utiliza el símbolo B para el resultado de *niño* y G para el resultado de *niña*. Considera el primer nacimiento como la primera etapa. (Consulta el ejemplo 1 si necesitas ayuda para empezar).

2. Escribe las probabilidades de los resultados de cada etapa en el diagrama de árbol que desarrollaste anteriormente y determina las probabilidades para cada uno de los 4 posibles resultados de nacimiento en una familia con 2 hijos (no gemelos).

3. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia tenga 2 niñas en esta situación? ¿Es mayor o menor que la probabilidad de tener exactamente 1 niña en 2 nacimientos?

Resumen de la lección

Los diagramas de árbol se pueden utilizar para organizar los resultados en el espacio muestral para los experimentos aleatorios que pueden ser realizados en varias etapas. Los diagramas de árbol son también útiles para el cálculo de las probabilidades de sucesos con más de un resultado.

Grupo de problemas

1. Imagine que una familia de tres (Alicia, Bill y Chester) juega bingo en casa todas las noches. Cada noche, la posibilidad de que cualquiera de los tres jugadores gane es $\frac{1}{3}$.
   a. Usando A si Alicia gana, B si Bill gana y C si Chester gana, desarrolla un diagrama de árbol que muestra los nueve posibles resultados de dos noches consecutivas de juego.
   b. ¿La probabilidad de que "Bill gane las dos noches" es la misma que la probabilidad de que "Alicia gane la primera noche y Chester gane la segunda noche"? Explica.

2. Según el sitio web de la lotería de Washington DC para el juego de ráscale instantáneo Cherry Blossom Doubler, la oportunidad de ganar un premio en un billete dado es de 17%. Imagina que una persona se detiene en una tienda de conveniencia en el camino a casa del trabajo todos los lunes y martes para comprar un boleto ráscale para jugar.
   (Fuente: http://dclottery.com/games/scratchers/1223/cherry-blossom-doubler.aspx, consultado el 27 de mayo de 2013)
   a. Desarrolla un diagrama de árbol que muestre los cuatro posibles resultados de jugar en estos dos días. Llama a la etapa 1 "lunes", y usa los símbolos W para un boleto ganador y L para un boleto no ganador.
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador no gane el lunes, pero gane el martes?
   c. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador gane al menos una vez durante el período de dos días?

Imagen del dado tetraédrico

Fuente: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:4-sided_dice_250.jpg

Lección 7: Calcular probabilidades de sucesos compuestos

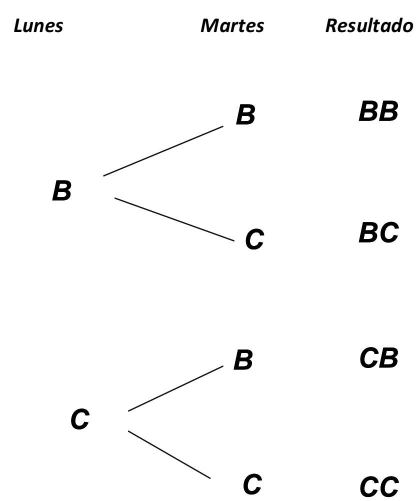
Trabajo en clase

Una lección previa introdujo *diagramas de árbol* como un método eficaz de mostrar los posibles resultados de ciertos experimentos aleatorios de varias etapas. Asimismo, en tales situaciones, los diagramas de árbol se mostraron útiles para el cálculo de probabilidades.

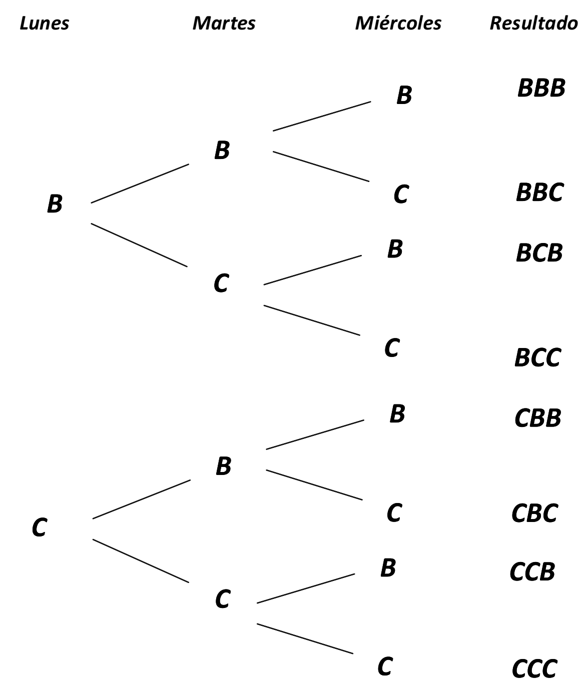
En esos ejemplos anteriores, los diagramas se centran sobre todo en los casos con dos etapas. Sin embargo, los principios básicos de los diagramas de árbol se pueden aplicar a situaciones con más de dos etapas.

Ejemplo 1: Tres noches de juegos

Recuerda un ejemplo anterior, donde una familia decide jugar cada noche y todos ellos están de acuerdo en usar un dado tetraédrico. (Una pirámide de cuatro lados donde cuatro de los resultados posibles tienen la misma probabilidad) Cada noche determinan aleatoriamente si van a jugar un juego de mesa (B) o un juego de cartas (C). El diagrama de árbol que indica los posibles resultados generales durante dos noches consecutivas se desarrolla a continuación:



Pero, ¿cómo podría cambiar el diagrama si estuvieran interesados en indicar el posible resultado general durante tres noches consecutivas? Para adaptarse a esta tercera etapa adicional, debes tomar medidas similares a las que hiciste antes. Se podrían conectar todas las posibilidades para la tercera etapa (miércoles) a cada rama de la etapa anterior (martes).



Ejercicios 1–3

1. Si BBB representa tres noches consecutivas de juegos de mesa, ¿qué representa CBB?

2. Enumera todos los resultados cuando se jugaron exactamente dos juegos de mesa durante tres días. ¿Cuántos resultados había?

3. Hay ocho posibles resultados que representan las tres noches. ¿Los ocho resultados que representan las tres noches son equiprobables? ¿Por qué sí o por qué no?

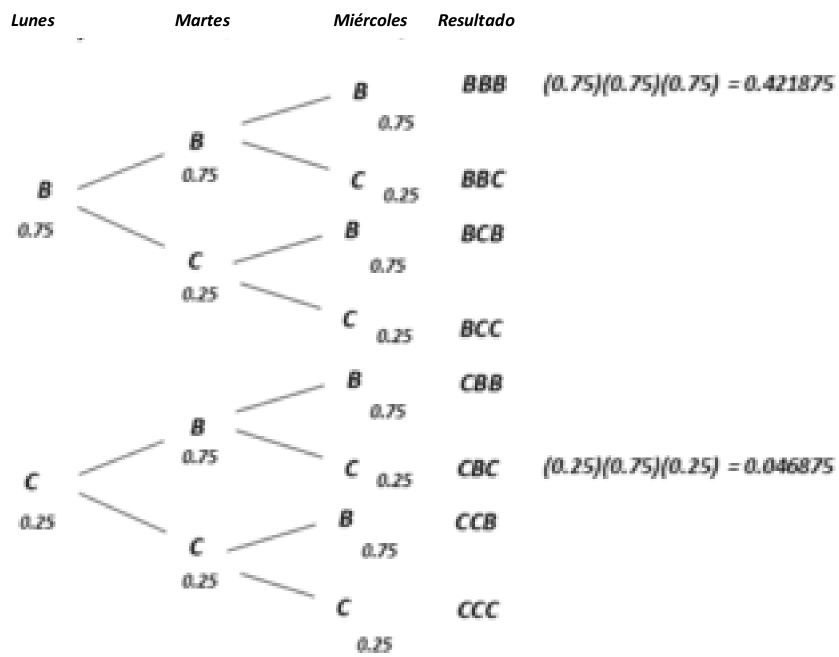
Ejemplo 2: Tres noches de juegos (con probabilidades)

En el Ejemplo 1, el resultado de cada noche es el resultado de un experimento aleatorio (tirar el dado de cuatro lados). Por lo tanto, hay una probabilidad asociada con el resultado de cada noche.

Al multiplicar las probabilidades de los resultados de cada etapa, se puede obtener la probabilidad para cada "rama del árbol”. En este caso, se puede calcular la probabilidad de cada uno de nuestros ocho resultados.

Para esta familia, se jugará un juego de cartas si el dado cae mostrando un valor de 1 y un juego de mesa se jugará si el dado cae mostrando un valor de 2, 3 o 4. Esto hace que la probabilidad de un juego de mesa (B) en una noche determinada sea 0.75.

Vamos a usar un árbol para examinar las probabilidades de los resultados para los tres días.



Ejercicios 4–6

4. Se muestran las probabilidades para dos de los ocho resultados. Calcula las probabilidades aproximadas de los seis resultados restantes.

5. ¿Cuál es la probabilidad de que habrá exactamente dos noches de juegos de mesa durante las tres noches?

6. ¿Cuál es la probabilidad de que la familia juegue al menos una noche juegos de cartas?

Ejercicios 7–10 Tres niños

Una familia vecina acaba de tener a su tercer hijo. Resulta que los 3 hijos de esta familia son niñas, y no son gemelas ni trillizas. Supón que por cada nacimiento, la probabilidad de que nazca un niño es 0.5, y la probabilidad de que nazca una niña es 0.5. ¿Cuáles son las posibilidades de tener 3 niñas en los primeros 3 nacimientos de una familia?

7. Dibuja un diagrama de árbol que muestre los resultados de los ocho nacimientos posibles para una familia con 3 hijos (sin gemelas ni trillizas). Utiliza el símbolo B para el resultado de *niño* y G para el resultado de *niña*. Considera el primer nacimiento como la primera etapa. (Consulta el ejemplo 1 si necesitas ayuda para empezar).

8. Escribe las probabilidades de los resultados de cada etapa en el diagrama de árbol que desarrollaste anteriormente y determina las probabilidades para cada uno de los ocho posibles resultados de nacimiento en una familia con 3 hijos (sin gemelas ni trillizas).

9. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia tenga 3 niñas en esta situación? ¿Es mayor o menor que la probabilidad de tener exactamente 2 niñas en 3 nacimientos?

10. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia de 3 hijos tenga al menos 1 niña?

Resumen de la lección

El uso de diagramas de árbol no se limita a los casos de tan sólo dos etapas. Para los experimentos más complicados, los diagramas de árbol se utilizan para organizar los resultados y asignar probabilidades. El diagrama de árbol es una representación visual de los resultados que involucran más de un suceso.

Grupo de problemas

1. Según el sitio web de la lotería de Washington DC para el juego de ráscale instantáneo Cherry Blossom Doubler, la oportunidad de ganar un premio en un billete dado es de 17%. Imagina que una persona se detiene en una tienda de conveniencia en el camino a casa del trabajo todos los lunes, martes y miércoles para comprar un boleto ráscale para jugar.

   (Fuente: http://dclottery.com/games/scratchers/1223/cherry-blossom-doubler.aspx, consultado el 27 de mayo de 2013)

   a. Desarrolla un diagrama de árbol que muestre los ocho posibles resultados de jugar durante estos tres días. Llama a la primera etapa "lunes", y usa los símbolos W para un boleto ganador y L para un boleto no ganador.

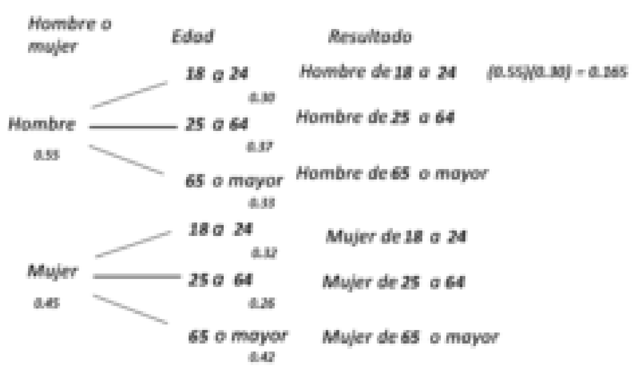
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador no gane el lunes, pero gane el martes y miércoles?

   c. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador gane al menos una vez durante el período de 3 días?

2. Una empresa de encuestas está interesada en realizar una encuesta a nivel estatal antes de las próximas elecciones. Sólo están interesados en hablar con los votantes registrados.

   Imagina que 55% de los votantes registrados en el estado son hombres y 45% son mujeres. Además, ten en cuenta que la distribución de edades puede ser diferente para cada grupo. En este estado, 30% de los votantes hombres registrados tienen 18-24 años, 37% tienen 25-64 años y 33% son mayores de 65 años. 32% de las votantes mujeres registradas tienen 18-24 años, 26% tienen de 25-64 años y 42% son mayores de 65 años.

   El siguiente diagrama de árbol describe la distribución de los votantes registrados. La probabilidad de seleccionar un votante hombre registrado de 18 a 24 años de edad es 0.165.



   a. ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía encuestadora seleccione una mujer votante registrada de 65 años o más?

   b. ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa de encuestas seleccione a cualquier votante registrado de 18-24 años?

Lección 8: La diferencia entre probabilidades teóricas y probabilidades estimadas

Trabajo en clase

¿Alguna vez has visto el comienzo de un partido de fútbol americano profesional? Después de los saludos de mano tradicionales, se lanza una moneda para determinar qué equipo tiene que patear la pelota para comenzar. El lanzamiento de una moneda al aire se utiliza a menudo para tomar decisiones entre dos grupos.

Ejemplo 1: ¿Por qué una moneda?

Las monedas fueron discutidas en las lecciones anteriores de este módulo. ¿Qué tiene de especial una moneda? En la mayoría de los casos, una moneda tiene dos caras diferentes: un lado de cara (C) y un lado de cruz (Z). El espacio muestral para el lanzamiento de una moneda es {cara, cruz}. Si cada resultado tiene la misma probabilidad de que se produzca cuando se lanza la moneda, entonces la probabilidad de que salga cara es $\frac{1}{2}$, o 0.5. La probabilidad de obtener cruz es también 0.5. Ten en cuenta que la suma de estas probabilidades es 1.

Las probabilidades formadas utilizando el espacio muestral y lo que sabemos acerca de las monedas se llaman probabilidades *teóricas*. El uso de las frecuencias relativas observadas es otro método para estimar las probabilidades de cara o cruz. Una frecuencia relativa es la proporción derivada del número de los resultados observados de un suceso dividido por el número total de resultados. Recuerda que en lecciones anteriores una frecuencia relativa se puede expresar como una fracción, un decimal o un porcentaje. ¿El estimado de una probabilidad de este método se acerca a la probabilidad teórica? El ejemplo siguiente investiga cómo las frecuencias relativas se pueden utilizar para estimar las probabilidades.

Beth lanza una moneda 10 veces y registra sus resultados. Estos son los resultados de los 10 lanzamientos:

Lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado	C	C	Z	C	C	C	Z	Z	Z	C

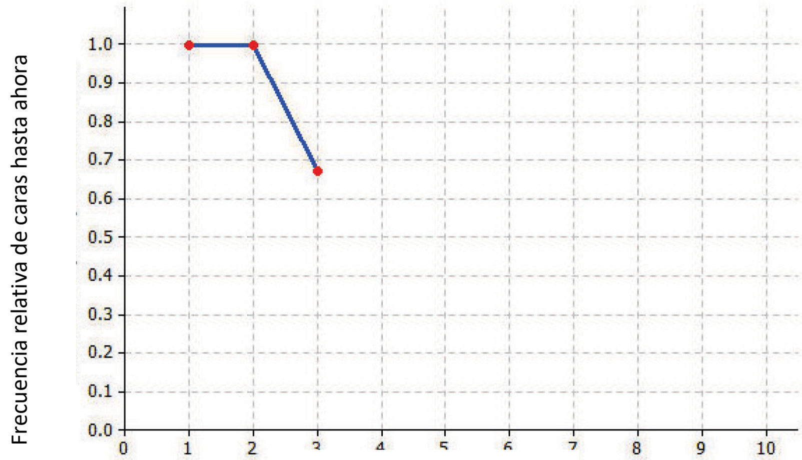
El número total de caras, dividido entre el número total de lanzamientos es la frecuencia relativa de cara. Es la proporción del tiempo que cara salió en estos lanzamientos. El número total de cruces dividido entre el número total de lanzamientos es la frecuencia relativa de cruz.

a. Bet empezó a completar la siguiente tabla como una manera de investigar las frecuencias relativas. Para cada resultado, el número total de lanzamientos aumentó. El número total de caras o cruces que se observó hasta ahora depende del resultado del sorteo actual. Completa está tabla de los 10 lanzamientos registrados en la tabla anterior.

Lanzamiento	Resultado	Número total de caras hasta ahora	Frecuencia relativa de cara hasta ahora (en centésimas)	Número total de cruces hasta ahora	Frecuencia relativa de cruz hasta ahora (en centésimas)
1	C	1	$\frac{1}{1} = 1$	0	$\frac{0}{1} = 0$
2	C	2	$\frac{2}{2} = 1$	0	$\frac{0}{2} = 0$
3	Z	2	$\frac{2}{3} \approx 0.67$	1	$\frac{1}{3} \approx 0.33$
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

b. ¿Cuál es la suma de la frecuencia relativa de cara y la frecuencia relativa de cruz para cada fila de la tabla?

c. Los resultados de Beth también se pueden visualizar mediante una gráfica. Usa los valores de la frecuencia relativa de cara hasta ahora en la tabla en la parte (a) para completar la siguiente gráfica.



d. Beth continuó lanzando la moneda y registró los resultados de un total de 40 lanzamientos. Estos son los resultados de los siguientes 30 lanzamientos:

Lanzamiento	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Resultado	Z	C	Z	C	Z	C	C	Z	C	Z

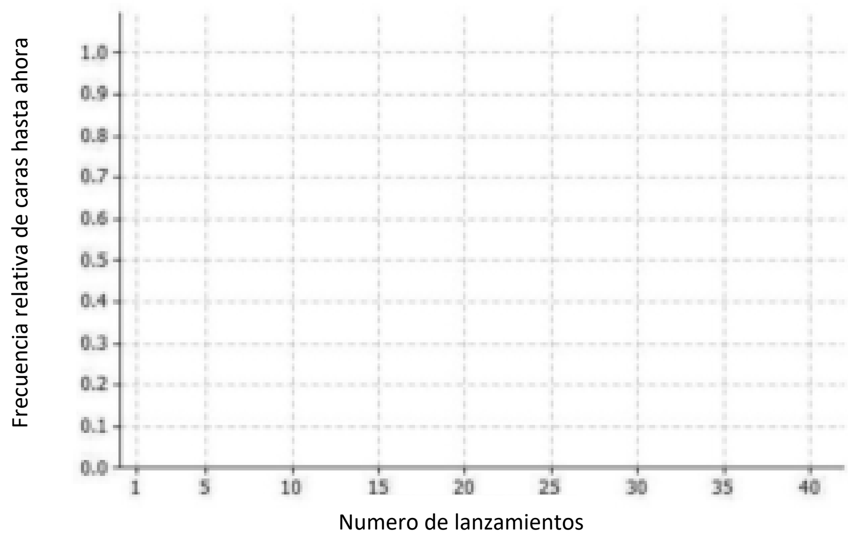
Lanzamiento	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Resultado	C	Z	Z	C	Z	Z	Z	Z	C	Z

Lanzamiento	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Resultado	C	Z	C	Z	C	Z	C	C	Z	Z

A medida que el número de lanzamientos aumentó, la frecuencia relativa de cara cambió. Completa la siguiente tabla para los 40 lanzamientos de moneda:

Número de lanzamientos	**Número total de caras hasta ahora**	**Frecuencia relativa de cara hasta ahora (en centésimas)**
1		
5		
10		
15		
20		
25		
30		
35		
40		

e. Utiliza la frecuencia relativa de cara hasta ahora en la tabla en la parte (d) para completar la gráfica a continuación para el número total de lanzamientos de 1, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, y 40.



f. ¿Qué notas acerca de los cambios en la frecuencia relativa del número de caras hasta ahora a medida que el número de lanzamientos aumenta?

g. Si lanzas la moneda 100 veces, ¿cómo crees que se vería la frecuencia relativa? Explica tu respuesta.

h. Basándote en tu gráfica y las frecuencias relativas, ¿cuál sería tu estimado de la probabilidad de que salgan caras? Explica tu respuesta.

i. ¿Qué tan cerca está tu estimado en parte (h) al modelo de probabilidad de 0.5? ¿El estimado de esta probabilidad podría haber sido buena si Beth solamente hubiera tirado la moneda un par de veces en lugar de 40?

El valor que se dio en la parte (h) es un estimado de la probabilidad teórica y se llama *probabilidad experimental o probabilidad estimada*.

Ejercicios 1-8

Bet recibió nueve centavos más. Ella los pegó de forma segura para formar una pequeña pila. El centavo superior de su pila mostraba cara y el centavo inferior mostraba cruz. Si Bet lanza la pila, ¿qué resultados podría observar?

1. Bet quería determinar la probabilidad de que salga cara cuando ella lanza la pila. ¿Crees que esta probabilidad es la misma que la probabilidad de que salga cara con una sola moneda? Explica tu respuesta.

2. Haz una pila robusta de 10 centavos en la que un extremo muestre cara y en el otro cruz. Asegúrate de que los centavos estén amarrados de forma segura o puedes tener un desastre cuando tires la pila. Lanza la pila para observar los posibles resultados. ¿Cuál es el espacio muestral al lanzar una pila de 10 centavos pegados con cinta adhesiva? ¿Crees que la probabilidad de cada resultado del espacio muestral sea igual? Explica tu respuesta.

3. Escribe los resultados de 10 lanzamientos. Completa el siguiente cuadro de las frecuencias relativas de las caras de tus 10 lanzamientos:

Lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado										
Frecuencia relativa de cara hasta ahora										

4. Basándose en el valor de las frecuencias relativas de cara hasta ahora, ¿cuál sería tu estimado de la probabilidad de que salga cara?

5. Lanza la pila de 10 centavos otras 20 veces. Completa la siguiente tabla:

Lanzamiento	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Resultado										

Lanzamiento	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Resultado										

6. Resume la frecuencia relativa de cara hasta el momento completando la siguiente tabla:

Número de lanzamientos	**Número total de caras hasta ahora**	**Frecuencia relativa de cara hasta ahora (en centésimas)**
1		
5		
10		
15		
20		
25		
30		

7. Basándote en las frecuencias relativas de los 30 lanzamientos, ¿cuál es tu estimado de la probabilidad de que salga cara? ¿Se puede comparar este estimado con un modelo de probabilidad como lo hiciste en el primer ejemplo? Explica tu respuesta.

8. Crea otra pila de centavos. Considera crear una pila utilizando 5 centavos, 15 centavos o 20 centavos pegados con cinta adhesiva de la misma manera que pegaste los centavos para formar una pila de 10 centavos. Una vez más, asegúrate de que los centavos se fijen con cinta o ¡podrías tener un lío!

   Lanza la pila que hiciste 30 veces. Escribe el resultado de cada lanzamiento.

Lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resultado										

Lanzamiento	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Resultado										

Lanzamiento	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Resultado										

Resumen de la lección

- La observación de la frecuencia relativa a largo plazo de un suceso de un experimento aleatorio (o la proporción de un suceso derivado de una larga secuencia de observaciones) se aproxima a la probabilidad teórica del suceso.
- Después de una larga secuencia de observaciones, las frecuencias relativas observadas se acercan a la probabilidad de que ocurra el suceso.
- Cuando no es posible calcular la probabilidad teórica de los experimentos aleatorios, entonces las frecuencias relativas a largo plazo (o la proporción de acontecimientos derivados de una larga secuencia de observaciones) se pueden utilizar como probabilidades estimadas de sucesos.

Grupo de problemas

1. Si has creado una pila de 15 centavos pegados con cinta adhesiva, ¿crees que la probabilidad de obtener cara al lanzar la pila sería distinta en la pila de 10 centavos? Explica tu respuesta.

2. Si has creado una pila de 20 centavos pegados con cinta adhesiva, ¿cuál crees que sería la probabilidad de obtener cara al lanzar la pila? Explica tu respuesta.

3. Basándote en tu trabajo en esta lección, completa la siguiente tabla de las frecuencias relativas de cara de la pila que has creado:

Número de lanzamientos	Número total de caras hasta ahora	Frecuencia relativa de cara hasta ahora (en centésimas)
1		
5		
10		
15		
20		
25		
30		

4. ¿Cuál es tu estimado de la probabilidad de que tu pila de centavos aterrice cara arriba cuando la tires? Explica tu respuesta.

5. ¿Hay una probabilidad teórica que podrías utilizar para comparar la probabilidad estimada? Explica tu respuesta.

Lección 9: Comparar probabilidades estimadas a probabilidades predichas por un modelo

Trabajo en clase

Desafío exploratorio: Concurso - ¡Escoger azul!

Imagina, por un momento, la siguiente situación: Tú y tus compañeros de clase son concursantes de un programa de concursos llamado - ¡Escoger azul! Hay dos bolsas en frente de ti, la Bolsa A y la Bolsa B. Cada bolsa contiene fichas rojas y azules. Te dicen que una de las bolsas tiene exactamente el mismo número de fichas azules que fichas rojas. Pero no te dicen la proporción de fichas azules en la otra bolsa.

Se pedirá a cada estudiante en tu clase que seleccione de la Bolsa A o Bolsa B. De la Bolsa A, se selecciona una ficha al azar. Si se saca una ficha azul, todos los estudiantes en tu clase que seleccionaron la Bolsa A ganan un contador azul. La ficha se coloca de nuevo en la bolsa. Después de mezclar las fichas en la bolsa otra ficha se selecciona al azar de la bolsa. Si la ficha es de color azul, los estudiantes que seleccionaron la Bolsa A ganan otro contador azul. Después de que la ficha se coloca de nuevo en la bolsa, el proceso continúa hasta que se saque una ficha roja. Cuando se coge una ficha roja, el juego se mueve a la Bolsa B. Una ficha de la Bolsa B se seleccionó al azar. Si es de color azul, todos los estudiantes que seleccionaron la Bolsa B ganan un contador azul. Pero si la ficha es de color rojo, el juego ha terminado. Al igual que para la Bolsa A, si la ficha es de color azul, el proceso se repite hasta que una ficha roja se saca de la bolsa. Cuando el juego ha terminado, los estudiantes con el mayor número de fichas azules son considerados el equipo ganador.

Sin ningún tipo de información acerca de las bolsas, es probable que selecciones una bolsa simplemente adivinando. Pero, sorprendentemente, los productores del programa van a permitir hacer un poco de investigación antes de seleccionar una bolsa. Durante los siguientes 20 minutos, se puede sacar una ficha de cualquiera de las dos bolsas, mirar la ficha y después poner la ficha de nuevo en la bolsa. Puedes repetir este proceso tantas veces como desees dentro de los 20 minutos. Al final de los 20 minutos, debes hacer tu decisión final y seleccionar cuál de las bolsas deseas utilizar en el juego.

Inicio

Supón que los productores del concurso no quieren regalar un montón de sus contadores azules. Como resultado, si una bolsa tiene el mismo número de fichas rojas y azules, ¿crees que la otra bolsa tendría más o menos fichas azules que las fichas de color rojo? Explica tu respuesta.

Planificación de la investigación

Tu maestro te proporcionará dos bolsas etiquetadas A y B. Tienes 20 minutos para experimentar sacando fichas de una de las bolsas. Después de examinar una ficha, debes ponerla de nuevo en la bolsa. Recuerda, no se vale mirar a escondidas en las bolsas, ya que eso te descalificaría del juego. Puedes sacar fichas de una sola bolsa o puedes escoger las fichas de una bolsa y después en la otra bolsa.

Utiliza los resultados de 20 minutos de investigación para determinar qué bolsa elegirías para el juego.

Proporciona una descripción de cómo llevarás a cabo tu investigación.

Investigación

Comparte tu plan con tu maestro. Tu maestro verificará si tu plan está dentro de las reglas del concurso. La aprobación de tu plan no significa, sin embargo, que tu maestro esté indicando que tu método de investigación ofrezca la forma más exacta de determinar qué bolsa seleccionar. Si el maestro aprueba tu investigación, lleva a cabo tu plan como se indica. Escribe los resultados de tu investigación según las indicaciones de tu maestro.

Juego

Después de que la investigación se ha llevado a cabo, la competencia comienza. Primero, tu maestro sacudirá la Bolsa A. Una ficha se selecciona. Si la ficha es de color azul, todos los estudiantes que seleccionaron la Bolsa A ganan un contador azul imaginario. La ficha se coloca de nuevo en la bolsa y el proceso continúa. Cuando una ficha roja se saca de la Bolsa A, los estudiantes que escogieron la Bolsa A han completado la competencia. Su maestro ahora sacudirá la Bolsa B. Una ficha se selecciona. Si es de color azul, todos los estudiantes que seleccionaron la Bolsa B ganan un contador azul imaginario. El proceso continúa hasta que se saca una ficha roja. En ese momento, el juego ha terminado. ¿Cuántos contadores azules ganaste?

Evaluación de los resultados

Al final del juego, tu maestro abrirá las bolsas y revelará cuántas fichas azules y rojas había en cada bolsa. Responde las preguntas que siguen. Una vez que hayas respondido a estas preguntas, coméntalas con tu clase.

1. Antes de jugar, ¿qué estabas intentando aprender acerca de las bolsas con tu investigación?

2. ¿Qué esperabas que sucediera cuando sacaste las fichas de la bolsa con el mismo número de fichas azules y rojas? ¿La bolsa que pensante que tenía el mismo número de fichas azules y rojas dio los resultados esperados?

3. ¿Qué tan seguro estabas al predecir qué bolsa tenía el mismo número de fichas azules y rojas? Explica.

4. ¿Qué bolsa seleccionaste para la competencia y por qué?

5. Si fueras un productor del concurso, ¿cómo diseñarías la segunda bolsa? (Recuerda, una bolsa tiene el mismo número de fichas rojas y azules).

6. Si escogiste una ficha de la Bolsa B 100 veces y elegiste cada color exactamente 50 veces, ¿sabrías a ciencia cierta que la bolsa B era la que tenía el mismo número de cada color?

Resumen de la lección

- Las frecuencias relativas a largo plazo se pueden utilizar como probabilidades estimadas de sucesos.
- La recolección de datos en un experimento aleatorio es una manera de estimar la probabilidad de un resultado.
- Mientras haya más datos recogidos sobre los resultados de un experimento aleatorio, más estrechas serán las estimaciones de las probabilidades con respecto a las probabilidades reales.

Grupo de problemas

Jerry y Michael jugaron un juego similar al de ¡*Escoger azul*! Los siguientes resultados son de su investigación utilizando las mismas dos bolsas:

Investigación de Jerry:

	Número de fichas rojas escogidas	Número de fichas azules escogidas
Bolsa A	2	8
Bolsa B	3	7

Investigación de Michael:

	Número de fichas rojas escogidas	Número de fichas azules escogidas
Bolsa A	28	12
Bolsa B	22	18

1. Si todo lo que sabes sobre las bolsas son los resultados de la investigación de Jerry, ¿qué bolsa seleccionarías para el juego? Explica tu respuesta.

2. Si todo lo que sabes sobre las bolsas son los resultados de la investigación de Michael, ¿qué bolsa seleccionarías para el juego? Explica tu respuesta.

3. ¿La investigación de Jerry o la investigación de Michael te da una mejor indicación de la composición de las fichas azules y rojas en cada bolsa? Explicar por qué has seleccionado esta investigación.

4. Supongamos que hay 12 fichas en cada bolsa. Utiliza la investigación de Jerry o de Michael para estimar el número de fichas rojas y azules en cada bolsa. Después, explica cómo empezar a hacer tus cálculos.

   Bolsa A

   Número de fichas rojas:

   Número de fichas azules:

   Bolsa B

   Número de fichas rojas:

   Número de fichas azules:

5. En un juego diferente de ¡*Escoger azul*!, dos bolsas contienen fichas rojas, azules, verdes y amarillas. Una bolsa contiene el mismo número de fichas rojas, azules, verdes y amarillas. En la segunda bolsa, la mitad de las fichas son de color azul. Describe un plan para determinar qué bolsa tiene más fichas azules que cualquiera de los otros colores.

Lección 10: Realizar una simulación para estimar la probabilidad de un suceso

Trabajo en clase

En las lecciones anteriores, calculaste las probabilidades de sucesos mediante la recopilación de datos empíricamente o mediante el establecimiento de un modelo de probabilidad teórica. Hay problemas reales para los que esos métodos pueden ser difíciles o imprácticos de usar. La simulación es un procedimiento que te permitirá responder preguntas sobre problemas reales mediante la ejecución de experimentos que se parecen mucho a la situación real.

A menudo es importante conocer las probabilidades de los sucesos de la vida real que pueden no tener probabilidades teóricas conocidas. Los científicos, ingenieros y matemáticos diseñan simulaciones para responder a las preguntas que involucran temas como las enfermedades, el flujo del agua, los cambios climáticos o las funciones de un motor. Los resultados de las simulaciones se utilizan para estimar las probabilidades que ayudan a los investigadores a entender los problemas y ofrecer posibles soluciones a estos problemas.

Ejemplo 1: Familias

¿Qué tan probable es que una familia con tres hijos tenga solo niños o solo niñas?

Vamos a suponer que un hijo tiene la misma probabilidad de ser un niño o una niña. En lugar de observar el resultado de nacimientos reales, un lanzamiento de una moneda al aire podría utilizarse para simular un nacimiento. Si el lanzamiento resulta en cara (C), entonces podríamos decir que nació un niño; si el lanzamiento resulta en cruz (Z), entonces podríamos decir que nació una niña. Si la moneda no está cargada (es decir, cara y cruz tienen la misma probabilidad), entonces tener un niño o una niña es equiprobable.

Ejercicios 1–2

Supón que una familia tiene tres hijos. Para simular el sexo de los tres hijos, tendría que usarse una moneda o un cubo numérico o una carta tres veces, una vez por cada hijo. Por ejemplo, tres lanzamientos de moneda dieron como resultado CCZ, lo que representa una familia con dos niños y una niña. Ten en cuenta que CZC y ZCC también representan dos niños y una niña.

1. Supón que cuando un número primo (P) se obtiene en el cubo numérico, simula un nacimiento de niño y un número no primo (N) simula un nacimiento de niña. Usando uno de estos cubos numéricos, enumera los resultados que simularían un nacimiento de niño y los que simularían un nacimiento de niña. ¿Son equiprobables los nacimientos de niño y de niña?

2. Supón que una carta se extrae de una baraja de cartas. Una carta roja (R) simula un nacimiento de niño y una carta negra (N) simula un nacimiento de niña. Describe cómo se puede simular una familia de tres hijos.

Ejemplo 2

La simulación proporciona un estimado de la probabilidad de que una familia de tres hijos tendría tres niños o tres niñas mediante la realización de tres lanzamientos de una moneda balanceada muchas veces. Cada secuencia de tres lanzamientos se llama un *ensayo*. Si un ensayo da ya sea CCC o ZZZ, entonces el ensayo representa solo niños o solo niñas, que es el suceso que nos interesa. Estos ensayos se llamarían un *éxito*. Si un ensayo resulta en cualquier otro orden de C y Z, entonces se llama un *fracaso*.

El estimado de la probabilidad de que una familia tenga ya sea tres niños o tres niñas basada en la simulación es el número de éxitos dividido por el número de ensayos. Supón que 100 ensayos se llevan a cabo y que en los 100 ensayos, 28 resultaron en CCC o ZZZ. Entonces, la probabilidad estimada de que una familia tenga tres hijos que sean tres niños o tres niñas sería $\frac{28}{100}$ o 0.28.

Ejercicios 3–5

3. Encuentra un estimado de la probabilidad de que una familia con tres hijos tenga exactamente una niña usando los siguientes resultados de 50 ensayos de lanzamiento de moneda al aire tres veces por ensayo. Usa C para representar un nacimiento de niño y Z para representar un nacimiento de niña.

CCZ	CZC	CCC	ZZC	ZCZ	ZCZ	CZZ	CCC	ZZC	CCC
CCZ	ZZZ	CCZ	ZZC	CCC	CZC	ZCC	ZZZ	ZCZ	ZCZ
ZCZ	CCC	ZCC	CZZ	CZC	ZZZ	CZZ	CCC	ZZC	ZCZ
ZCC	CCZ	ZZZ	ZZC	CZZ	ZCC	CZZ	CZC	ZZZ	CCC
CZC	CZC	ZCZ	ZZC	ZZZ	CCZ	CCZ	ZCZ	ZZZ	CZZ

4. Realiza una simulación de 50 ensayos lanzando un cubo numérico balanceado con el fin de encontrar un estimado de la probabilidad de que una familia con tres hijos tenga exactamente una niña.

   a. Especifica qué resultados de un lanzamiento de un cubo numérico balanceado representarán un niño y qué resultados representarán una niña

   b. Simula 50 ensayos, teniendo en cuenta que un ensayo requiere tres lanzamientos del cubo numérico. Enumera los resultados de tus 50 ensayos.

   c. Calcula la probabilidad estimada.

5. Calcula la probabilidad teórica de que una familia con tres hijos tenga exactamente una niña.

   a. Enumera los posibles resultados de una familia con tres hijos. Por ejemplo, un resultado posible es BBB (los tres hijos son niños).

   b. Supón que tener un niño y tener una niña son equiprobables. Calcula la probabilidad teórica de que una familia con tres hijos tenga exactamente una niña.

c. Compárala con las probabilidades estimadas que se encontraron en las partes (a) y (b).

Ejemplo 3: Jugadora de baloncesto

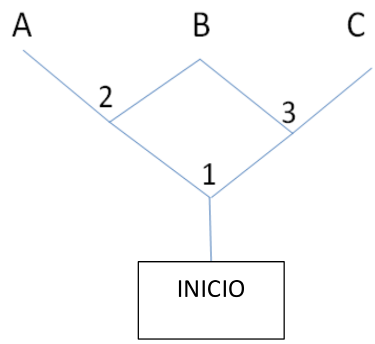
Supón que, en promedio, una jugadora de baloncesto hace aproximadamente tres de cada cuatro tiros libres. En otras palabras, ella tiene 75% de probabilidad de hacer cada disparo de falta que ella toma. Puesto que un lanzamiento de moneda produce resultados equiprobables, no podría utilizarse en una simulación para este problema.

En su lugar, un cubo numérico se podría utilizar al especificar que los números 1, 2 o 3 representan una canasta, el número 4 representa un fallo, y los números 5 y 6 sería ignorados. Basándote en los siguientes 50 ensayos de lanzar un cubo numérico balanceado, encuentra un estimado de la probabilidad de que haga cinco o seis de los seis tiros libres que ella toma.

441323	342124	442123	422313	441243
124144	333434	243122	232323	224341
121411	321341	111422	114232	414411
344221	222442	343123	122111	322131
131224	213344	321241	311214	241131
143143	243224	323443	324243	214322
214411	423221	311423	142141	411312
343214	123131	242124	141132	343122
121142	321442	121423	443431	214433
331113	311313	211411	433434	323314

Grupo de problemas

1. Se coloca un ratón al inicio del laberinto que se muestra a continuación. Si llega a la estación B, se le da una recompensa. En cada punto en el que el ratón tiene que decidir en qué dirección ir, asume que tiene la misma probabilidad de ir en cualquier dirección. En cada punto de decisión 1, 2, 3, tiene que decidir si ir a la izquierda (L) o derecho (R). No puede ir hacia atrás.



a. Crea un modelo teórico de probabilidades de que el ratón llegue a los puntos terminales A, B y C.

i. Enumera los posibles caminos de un espacio muestral para los caminos que el ratón puede tomar. Por ejemplo, si el ratón va a la izquierda en el punto de decisión 1 y después a la derecha en el punto de decisión 2, entonces el camino se representará LR.

ii. ¿Son equiprobables las rutas de tu espacio muestral? Explica.

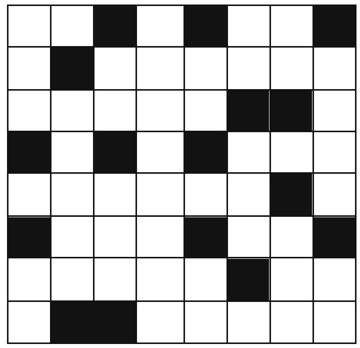
iii. ¿Cuáles son las probabilidades teóricas de que un ratón llegue a los puntos terminales A, B y C? Explica.

b. Basándote en el siguiente conjunto de trayectorias simuladas, estima las probabilidades de que el ratón llegue a los puntos A, B y C.

RR	RR	RL	LL	LR	RL	LR	LL	LR	RR
LR	RL	LR	RR	RL	LR	RR	LL	RL	RL
LL	LR	LR	LL	RR	RR	RL	LL	RR	LR
RR	LR	RR	LR	LR	LL	LR	RL	RL	LL

c. ¿De qué manera se comparan las probabilidades simuladas en parte (b) con las probabilidades teóricas de parte (a)?

2. Supón que una diana se compone de la cuadrícula 8×8 que se muestra a continuación. Además, supón que cuando se lanza un dardo, es equiprobable que aterrice en cualquiera de las 64 casillas. Un punto se gana si el dardo cae en una de las 16 casillas negras. Cero puntos se consiguen si el dardo cae en una casilla blanca.



   a. Por un lanzamiento de un dardo, ¿cuál es la probabilidad de ganar un punto? Ten en cuenta que un punto se gana si el dardo cae en una casilla negra.

   b. Lin quiere usar un cubo numérico para simular el resultado de un dardo. Sugiere que 1 en el cubo numérico podría representar una victoria. Obtener 2, 3 o 4 podría representar que no se anotó ningún punto. Dice que ignoraría 5 o 6. ¿Es apropiada la sugerencia de Lin para una simulación? Explica por qué lo utilizarías o si no, cómo lo cambiarías?

   c. Supón que un juego consiste en lanzar un dardo tres veces. Un ensayo consta de tres lanzamientos del cubo numérico. Basándote en la sugerencia de Lin en parte (b) y los siguientes lanzamientos simulados, estima la probabilidad de anotar dos puntos con tres dardos.

324	332	411	322	124
224	221	241	111	223
321	332	112	433	412
443	322	424	412	433
144	322	421	414	111
242	244	222	331	224
113	223	333	414	212
431	233	314	212	241
421	222	222	112	113
212	413	341	442	324

   d. La probabilidad teórica para ganar 0, 1, 2 y 3 puntos en tres lanzamientos de dardos como se describe en este problema es:

      i. Ganar 0 puntos tiene una probabilidad de 0.42.

      ii. Ganar 1 punto tiene una probabilidad de 0.42.

      iii. Ganar 2 puntos tiene una probabilidad de 0.14.

      iv. Ganar 3 puntos tiene una probabilidad de 0.02.

   Utiliza los lanzamientos simulados en parte (c) para construir un modelo de ganar 0, 1, 2 y 3 puntos y compáralo con el modelo teórico.

Lección 11: Realizar una simulación para estimar la probabilidad de un suceso

Trabajo en clase

Ejemplo 1: Simulación

En la lección anterior, se utilizaron monedas, cubos numéricos y cartas para llevar a cabo simulaciones. Otra opción es poner piezas idénticas de papel o discos de colores en un recipiente, revolverlos bien y luego elegir uno.

Por ejemplo, si un jugador de baloncesto normalmente convierte cinco de ocho tiros libres, entonces un disco de color podría utilizarse para simular un tiro libre. Un disco verde podría representar un tiro logrado y un disco rojo podría representar un fallo. Se pueden poner cinco discos verdes y tres rojos en un recipiente, mezclar y luego elegir uno para representar un tiro libre. Si el color del disco es verde, entonces el tiro se convierte. Si el color del disco es rojo, entonces el disparo se falla. Este procedimiento simula un tiro libre.

a. Con discos de colores, describe cómo un turno al bate podría ser simulado para un jugador de béisbol que tiene un promedio de bateo de 0.300. Ten en cuenta que un promedio de bateo de 0.300 significa que el jugador conecta un hit (en promedio) tres veces de cada diez turnos al bate. Asegúrate de indicar claramente lo que representa un color.

b. Con discos de colores, describe cómo un turno al bate podría ser simulado para un jugador que tiene un promedio de bateo de 0.273. Ten cuenta que un promedio de bateo de 0.273 significa que, en promedio, el jugador conecta 273 hits de $1{,}000$ turnos al bate.

Ejemplo 2: Usar tablas de números aleatorios

¿Por qué no es práctico el uso de discos de colores para la situación descrita en el Ejemplo 1(b)? Otra forma de llevar a cabo una simulación es utilizar una tabla de números aleatorios o un generador de números aleatorios. En una tabla de números aleatorios, los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 se producen con la misma frecuencia a largo plazo. Páginas y páginas de números aleatorios se pueden encontrar en línea.

Por ejemplo, aquí hay tres rectas de números aleatorios. El espacio después de cada cinco dígitos es sólo para facilitar la lectura. No hagas caso de los espacios al utilizar la tabla.

25256	65205	72597	00562	12683	90674	78923	96568	32177	33855
76635	92290	88864	72794	14333	79019	05943	77510	74051	87238
07895	86481	94036	12749	24005	80718	13144	66934	54730	77140

Para utilizar la tabla de números aleatorios y simular un turno al bate del bateador de 0.273 en el Ejemplo 1(b), se puede utilizar un número de tres dígitos para representar un turno al bate. Los números de tres dígitos 000–272 podrían representar un hit y los números de tres dígitos 273–999 podrían representar no hit. Usando los números aleatorios arriba y empezando por el principio de la primera línea, el primer número aleatorio de tres dígitos es 252, que está entre 000 y 272, así que ese turno al bate simulado es un hit. El siguiente número aleatorio de tres dígitos es 566, que no es un hit.

Continuando en la primera recta de números aleatorios arriba, ¿cuáles serían los resultados hit/no-hit para los próximos seis turnos al bate? Asegúrate de indicar el número aleatorio y si simula un hit o no.

Ejemplo 3: Jugador de béisbol

Un bateador normalmente tiene cuatro turnos al bate en un juego. Considera el bateador de 0.273 del ejemplo anterior. Utiliza los pasos siguientes (y los números aleatorios que se muestran arriba) para estimar la probabilidad de que el jugador consiga al menos tres hits (tres o cuatro) en cuatro turnos al bate.

a. Describe qué es un ensayo para este problema.

b. Describe cuándo un ensayo es un éxito y cuándo es un fracaso.

c. Simula 12 ensayos. (Continúa trabajando con la clase, o trabaja con un compañero).

d. Utiliza los resultados de la simulación para estimar la probabilidad de que un bateador de 0.273 consiga tres o cuatro hits en cuatro turnos al bate. Compara tu estimación con otros grupos.

Ejemplo 4: Mes de nacimiento

En un grupo de más de 12 personas, ¿es probable que al menos dos personas, quizás más, tengan el mismo mes de nacimiento? ¿Por qué? Descríbelo con tus propias palabras.

Ahora, supongamos que la misma pregunta se hace para un grupo de sólo siete personas. ¿Es probable encontrar algunos grupos de siete personas en los que existe una coincidencia pero otros grupos en los que las siete personas tengan diferentes meses de nacimiento? En los siguientes ejercicios, estimarás la probabilidad de que al menos dos personas en un grupo de siete nacieron en el mismo mes.

Ejercicios 1–4

1. ¿Cuál podría ser una buena manera de generar resultados para el problema del mes de nacimiento—usar monedas, cubos numéricos, cartas, ruletas, discos de colores o números aleatorios?

2. ¿Cómo simularías un ensayo de siete meses de nacimiento?

3. ¿Cómo se determina un éxito para tu simulación?

4. ¿Cómo se determina el estimado simulado para la probabilidad de que al menos dos en un grupo de siete personas nacieron en el mismo mes?

Resumen de la lección

Para diseñar una simulación:

- Identifica los posibles resultados y decide cómo simularlos, usando monedas, cubos numéricos, cartas, ruletas, discos de colores o números aleatorios.
- Especifica cómo sería un ensayo de simulación y qué significaría un éxito y un fracaso.
- Asegúrate de llevar a cabo suficientes ensayos para garantizar que la probabilidad estimada se acerque más a la probabilidad real a medida que haces más ensayos. No hay necesidad de un número específico de ensayos en este momento; sin embargo, debes asegurarte de llevar a cabo suficientes ensayos para que las frecuencias relativas se nivelen.

Grupo de problemas

1. Un modelo de avión tiene dos motores. Se puede volar si un motor falla, pero está en serios problemas si los dos motores fallan. Los motores funcionan independientemente uno de otro. En un vuelo determinado, la probabilidad de un fracaso es 0.10 para cada motor. Diseña una simulación para estimar la probabilidad de que el avión estará en serios problemas la próxima vez que vuelee.
   a. ¿Cómo simularías el estado de un motor?
   b. ¿Qué constituye un ensayo para esta simulación?
   c. ¿Qué constituye un éxito para esta simulación?
   d. Realiza 50 ensayos de tu simulación, haz una lista de tus resultados y calcula un estimado de la probabilidad de que el avión estará en serios problemas la próxima vez que vuele.

2. En un esfuerzo por aumentar las ventas, un fabricante de cereales ha creado un juguete muy ingenioso que consta de seis partes. Una parte se pone en cada caja de cereal. No se sabe qué parte se encuentra en una caja hasta que la caja se abre. Puedes jugar con el juguete sin tener todas las seis partes, pero es mejor tener el juguete completo. Si tienes mucha suerte, tal vez necesites comprar solo seis cajas para tener el juguete completo. Pero si tienes muy mala suerte, tal vez tendrás que comprar muchas, muchas cajas antes de obtener las seis partes.
   a. ¿Cómo representarías los resultados de comprar una caja de cereal, teniendo en cuenta que hay seis partes diferentes? Hay una parte en cada caja.
   b. Si se indicó que un cliente tendría que comprar por lo menos 10 cajas de cereal para obtener todas las seis partes, ¿qué constituye un ensayo en este problema?
   c. ¿Qué constituye un éxito en un ensayo en este problema?
   d. Realiza 15 ensayos, haz una lista de tus resultados y calcula un estimado de la probabilidad de que se necesite comprar 10 cajas o más para obtener las seis partes.

3. Supón que se necesita un donante de sangre tipo A para una cirugía. Haz una simulación para responder a la siguiente pregunta: Si 40% de los donantes tienen sangre tipo A, ¿cuál es un estimado de la probabilidad de que tomará al menos cuatro donantes para encontrar uno con sangre tipo A?
   a. ¿Cómo simularías que un donante de sangre sea sangre tipo A o no?
   b. ¿Qué constituye un ensayo para esta simulación?
   c. ¿Qué constituye un éxito para esta simulación?
   d. Realiza 15 ensayos, haz una lista de tus resultados y calcula un estimado de la probabilidad de que se necesiten al menos cuatro donantes para encontrar uno con sangre tipo A.

Lección 12: Aplicar la probabilidad para tomar decisiones informadas

Trabajo en clase

Ejemplo 1: Cubo numérico

Tu maestro te da un cubo numérico con los números 1–6 en sus caras. Nunca antes has visto ese cubo en particular. Se te pide que indiques un modelo de probabilidad teórica de lanzarlo una vez. Un modelo de probabilidad consiste en la lista de resultados posibles (el espacio muestral) y las probabilidades teóricas asociadas con cada uno de los resultados. Dices que el modelo de probabilidad podría asignar una probabilidad de $\frac{1}{6}$ a cada uno de los posibles resultados, pero como nunca has visto este cubo en particular antes, te gustaría lanzarlo un par de veces. (Tal vez se trata de un cubo cargado). Supón que tu maestro te permite lanzarlo 500 veces y obtienes los siguientes resultados:

Resultado	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	77	92	75	90	76	90

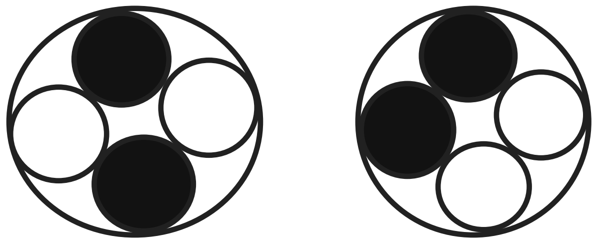
Ejercicios 1–2

1. Si el modelo equiprobable es correcto, ¿como cuántos de cada resultado esperas ver si el cubo se lanzó 500 veces?

2. Basándose en los datos de los 500 lanzamientos, ¿con qué frecuencia se observaron números impares? ¿Con qué frecuencia se observaron números pares?

Ejemplo 2: Modelo de probabilidad

Dos bolas negras y dos bolas blancas se ponen en una taza pequeña, cuyo fondo permite a las cuatro bolas encajar perfectamente. Después de agitar el vaso bien, son posibles dos patrones de colores, tal como se muestra. El patrón de la izquierda muestra que los colores similares están uno frente al otro y el patrón de la derecha muestra los colores similares están al lado de o adyacentes entre sí.



Se le pide a Phillippe especificar un modelo de probabilidad para el experimento aleatorio de sacudir el vaso y observar el patrón. Él piensa que debido a que hay dos resultados—como cara y cruz en una moneda—los resultados son equiprobables. Sylvia no está tan segura de que el modelo equiprobable sea correcto, por lo que a ella le gustaría recoger algunos datos antes de decidirse por un modelo.

Ejercicio 3

3. Recopila los datos para Sylvia. Lleva a cabo el experimento de sacudir un vaso que contiene cuatro bolas, dos blancas y dos negras, observa y registra si el patrón es opuesto o adyacente. Repite este proceso 20 veces. Después, combina los datos con los recogidos por tus compañeros de clase.

   ¿Tus resultados concuerdan con el modelo equiprobable de Philippe o indican que Sylvia tenía la idea correcta? Explica.

Ejercicios 4–5

Hay tres marcas populares de frutos secos. A tu maestro le encantan los anacardos y en su experiencia de haber comprado estas marcas, sugiere que no todas las marcas tienen el mismo porcentaje de anacardos. Una tiene alrededor de 20% anacardos, una tiene 25% y una tiene 35%.

Tu maestro tiene bolsas etiquetadas A, B y C que representan las tres marcas. Las bolsas contienen cuentas rojas que representan los anacardos y cuentas marrones que representan otros tipos de frutos secos. Una bolsa contiene 20% de cuentas rojas, otra 25% de cuentas rojas y la tercera tiene 35% de cuentas rojas. Debes determinar qué bolsa contiene qué porcentaje de anacardos. No se puede simplemente abrir las bolsas y contar las cuentas.

4. Trabaja con la clase para diseñar una simulación. Es necesario ponerse de acuerdo sobre lo que es un resultado, lo que es un ensayo, lo que es un éxito y cómo calcular la probabilidad estimada de conseguir un anacardo. Basa tu estimado en 50 ensayos.

5. Tu maestro le dará a tu grupo una de las bolsas etiquetadas A, B o C. Usa tu plan de la parte (a), recoge tus datos. ¿Crees que tienes una bolsa de 20%, 25% o 35% de anacardos? Explica.

Ejercicios 6-8

Supón que tienes dos bolsas, A y B, en las que hay un número igual de tiras de papel. Los números positivos se escriben en las tiras. No se saben los números, pero son enteros de entre 1 y 75. El mismo número puede aparecer en más de una tira de papel en una bolsa.

Estas bolsas se utilizan en un juego. En este juego, eliges una de las bolsas y luego eliges una tira de esa bolsa. Si eliges Bolsa de A y el número que eliges de ella es un número primo, entonces ganas. Si eliges la Bolsa B y el número que eliges de ella es una potencia de 2, ganas. ¿Qué bolsa debes elegir?

6. Emma sugiere que no importa qué bolsa elijas ya que no sabes nada acerca de qué números están dentro de las bolsas. Por lo tanto, cree que son las mismas probabilidades de ganar con cualquier bolsa. ¿Estás de acuerdo con ella? Explica.

7. Aamir sugiere que le gustaría recoger algunos datos de las dos bolsas antes de tomar una decisión acerca de si el modelo es o no es equiprobable. Ayuda a Aamir sacando las 50 tiras de cada bolsa, asegurándote de reemplazar cada una antes de elegir de nuevo. Cada vez que saques una tira, registra si habrías sido un ganador o no. Utilizando los resultados, ¿cuál es tu estimado de la probabilidad de sacar un número primo de la bolsa A y sacar una potencia de 2 de la Bolsa B?

8. Si jugaras este juego, ¿qué bolsa elegirías? Explica por qué escogerías esta bolsa.

Grupo de problemas

1. Algunos M&M's® son "defectuosos". Por ejemplo, a un M&M® defectuoso le puede faltar la M o puede estar agrietado, roto o de forma irregular. ¿La probabilidad de obtener un M&M® defectuoso es mayor con los M&M's® de cacahuete que con los M&M's® planos?

   Gloriann sugiere que la probabilidad de obtener un M&M® plano defectuoso es la misma que la probabilidad de obtener un M&M® de cacahuete defectuoso. Suzanne no cree que esto sea correcto porque un cacahuete M&M® es más grande que un M&M® plano y por lo tanto tiene una mayor oportunidad de dañarse.

   a. Simula la inspección de un M&M® plano, lanzando dos cubos numéricos. Deja que una suma de 7 o 11 represente un M&M® plano defectuoso y los otros tiros posibles representen un M&M® plano que no está defectuoso. Haz 50 ensayos y calcula un estimado de la probabilidad de que un M&M® plano sea defectuoso. Registra los 50 resultados que has observado. Explica tu proceso.

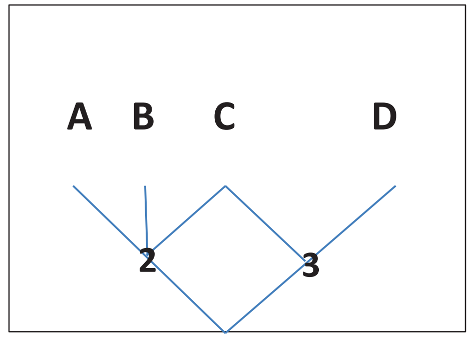
   b. Simula la inspección de un M&M® de cacahuete seleccionando una carta de una baraja bien barajada. Deja que una carta de la cara de un solo ojo y los tréboles representen un cacahuete M&M® defectuoso y las otras cartas representen un cacahuete M&M® que no es defectuoso. Asegúrate de reemplazar la carta elegida después de cada ensayo y barajar bien antes de elegir la siguiente carta. Ten en cuenta que las cartas de la cara de un solo ojo son el rey de diamantes, jota de corazones y la jota de picas. Haz 20 ensayos y calcula un estimado de la probabilidad de que un M&M® de cacahuete sea defectuoso. Registra la lista de 20 tarjetas que observaste. Explica tu proceso.

   c. Para este problema, supón que las dos simulaciones proporcionan estimaciones precisas de la probabilidad de un defecto en un M&M® plano y un M&M® de cacahuete. Compara tus dos estimaciones de probabilidad y predice si la creencia de Gloriann es razonable que la probabilidad defectuosa es la misma para ambos tipos de M&M's®. Explica tu razonamiento.

2. Uno a la vez, los ratones se colocan al comienzo del laberinto que se muestra a continuación. Hay cuatro estaciones terminales en A, B, C y D. En cada punto en el que un ratón tiene que decidir en qué dirección ir, asume que es equiprobable que pueda elegir cualquiera de las direcciones posibles. Un ratón no puede ir hacia atrás.

   En los siguientes ensayos simulados, L representa izquierda, R derecha y S recto. Estima la probabilidad de que un ratón encuentre la estación C, donde está la comida. No hay alimento en A, B o D. Los siguientes datos fueron recogidos en 50 trayectorias simuladas que hicieron los ratones.

LR	RL	RL	LL	LS	LS	RL	RR	RR	RL
RL	LR	LR	RR	LR	LR	LL	LS	RL	LR
RR	LS	RL	RR	RL	LR	LR	LL	LS	RR
RL	RL	RL	RR	RR	RR	LR	LL	LL	RR
RR	LS	RR	LR	RR	RR	LL	RR	LS	LS



a. ¿Qué caminos constituyen un éxito y qué caminos constituyen un fracaso?

b. Utiliza los datos para estimar la probabilidad de que un ratón encuentre comida. Muestra tu trabajo.

c. Paige sugiere que es equiprobable que un ratón llegue a cualquiera de las cuatro estaciones terminales. ¿Qué sugiere tu simulación acerca de si su modelo equiprobable es creíble? Si no es creíble, ¿qué sugieren tus datos que sea un modelo más creíble?

d. ¿Tu simulación admite el siguiente modelo de probabilidad teórica? Explica.

   i. La probabilidad de que un ratón encuentre el punto terminal A es 0.167.

   ii. La probabilidad de que un ratón encuentre el punto terminal B es 0.167.

   iii. La probabilidad de que un ratón encuentre el punto terminal C es 0.417.

   iv. La probabilidad de que un ratón encuentre el punto terminal D es 0.250.

Lección 13: Poblaciones, muestras y generalización de una muestra a una población

Trabajo en clase

En esta lección, aprenderás sobre la recolección de datos de una muestra que se selecciona a partir de una población. También podrás aprender acerca de los resúmenes de los valores, tanto de una población como de una muestra y pensar en lo que se puede aprender acerca de la población al ver una muestra de esa población.

Ejercicios 1–4: Recolección de datos

1. Describe lo que harías si tuvieras que recopilar datos para investigar las siguientes preguntas estadísticas utilizando ya sea una estadística muestral o una característica de la población. Explica tu razonamiento en cada caso.

   a. ¿Cómo se podría recopilar datos para responder a la pregunta: “¿La sopa sabe bien?”

   b. ¿Cómo se podría recopilar datos para responder a la pregunta: "¿Cuántas películas ven los estudiantes de la clase en un mes?”

   c. ¿Cómo se podría recopilar datos para responder a la pregunta: "¿Cuál es la mediana de costo de una casa en nuestra ciudad?”

   d. ¿Cómo se podría recopilar datos para responder a la pregunta: "¿Cuántas mascotas compra la gente en mi vecindario?"

   e. ¿Cómo se podría recopilar datos para responder a la pregunta: "¿Cuál es el número típico de ausencias en las clases de matemáticas en tu escuela en un día determinado?"

f. ¿Cómo se podría recopilar datos para responder a la pregunta: "¿Cuál es la duración de la vida útil de una determinada marca de baterías para linterna?"

g. ¿Cómo se podría recopilar datos para responder a la pregunta: "¿Qué porcentaje de niñas y de niños en tu escuela tienen un toque de queda?"

h. ¿Cómo se podría recopilar datos para responder a la pregunta: "¿Cuál es el grupo sanguíneo más común de los estudiantes en mi clase?"

Una *población* es el conjunto de objetos (por ejemplo, personas, animales y plantas) a partir del cual se pueden recopilar datos. Una muestra es un subconjunto de la población. El resumen de los valores numéricos calculados utilizando datos de una población entera se llaman *características de la población.* El resumen de los valores numéricos calculados usando datos de una muestra se llaman *estadísticas*.

2. ¿Cuál de los escenarios en el Ejercicio 1 describiste usando datos recolectados de una población y cuál de una muestra?

3. Piensa en la recolección de datos en los escenarios anteriores. Da por lo menos dos razones por las que sea mejor recoger datos de una muestra y no de toda la población.

4. Inventa un resultado que podrías obtener como respuesta en las situaciones del Ejercicio 1 e identificar si el resultado se basa en una característica de población o de una estadística muestral.
   a. ¿La sopa tiene buen sabor?

   b. ¿Cuántas películas ven los estudiantes de la clase en un mes?

   c. ¿Cuál es la mediana de precio de una casa en nuestra ciudad?

   d. ¿Cuántas mascotas tienen las personas en mi vecindario?

   e. ¿Cuál es el número típico de ausencias en las clases de matemáticas en tu escuela en un día determinado?

   f. ¿Cuál es la duración de la vida útil de una determinada marca de baterías para linterna?

   g. ¿Qué porcentaje de niñas y de niños en tu escuela tienen una hora límite para salir?

   h. ¿Cuál es el grupo sanguíneo más común de los estudiantes en mi clase?

Ejercicio 5: ¿Población o muestra?

5. Indica si las siguientes declaraciones resumen la información recopilada para responder a una pregunta estadística de una población o de una muestra. Identifica las referencias en la afirmación como características de la población o estadística muestral.

   a. 54% de los que respondieron a una encuesta en una universidad indican que la riqueza debe ser distribuida de manera más uniforme entre las personas.

   b. ¿Los estudiantes en el distrito escolar Bay Shore son competentes en las evaluaciones del estado en matemáticas? En 2013, después de que se evaluaron todas las pruebas tomadas por los estudiantes en las escuelas de Bay Shore, aproximadamente el 52% de esos estudiantes estaban a nivel competente o superaban las expectativas de la evaluación estatal.

   c. ¿Hablar por teléfono celular mientras se conduce distrae a las personas? Los investigadores midieron los tiempos de reacción de 38 participantes en el estudio mientras hablaban por teléfono celular y encontraron que el nivel promedio de distracción al conducir se clasificó de 2.25 de 5.

   d. ¿La mayoría de las personas que viven en Nueva York en el 2010 tienen por lo menos educación secundaria? Basándote en los datos recogidos de todos los residentes de Nueva York en el 2010 por la oficina del censo de Estados Unidos, 84.6% de las personas que viven en Nueva York tenían al menos una educación de escuela secundaria.

   e. ¿Hubo más muertes que nacimientos en los Estados Unidos entre julio 2011 y julio de 2012? Los datos de una agencia de servicios de salud indicaron que hubo 2% más muertes que nacimientos en los Estados Unidos durante ese periodo de tiempo.

f. ¿Cuál es el quinto libro de mayor venta en los Estados Unidos? Basándote en las ventas de libros en los Estados Unidos, el quinto libro de mayor venta fue *¡Oh, los lugares a los que irás!* de Dr. Seuss.

Ejercicios 6–8: Un censo

6. Cuando los datos se recogen de toda una población, se llama *censo*. Los Estados Unidos hacen un censo de su población cada diez años, el más reciente fue en 2010. Ve a http://www.census.gov para encontrar la historia del censo de los Estados Unidos.
   a. Identifica tres cosas que has encontrado interesantes.

   b. ¿Por qué es importante el censo en los Estados Unidos?

7. Visita: www.census.gov/2010census/popmap/ipmtext.php?fl=36.
   Selecciona el estado de Nueva York.
   a. ¿Cuántas personas vivían en Nueva York en el censo de 2010?

   b. Estima la razón de personas mayores de 65 años a aquellas que son menores de 18 años. ¿Por qué es importante pensar en esto?

   c. ¿La razón es una característica de población o una estadística? Explica tu razonamiento.

8. La Encuesta sobre la Comunidad Estadounidense (ACS) toma muestras de un pequeño porcentaje de la población de Estados Unidos en los años entre los censos. (www.census.gov/acs/www/about_the_survey/american_community_survey/)

   a. ¿Cuál es la diferencia entre la forma en que el ACS recopila información acerca de la población de Estados Unidos y la forma en que la Oficina de Censo de Estados Unidos recopila información?

   b. En 2011, el ACS muestreó los trabajadores que viven en Nueva York y se desplazan al trabajo cada día. ¿Por qué crees que estos datos son importantes para el estado que conoces?

   c. Supón que a partir de una muestra de $200{,}000$ trabajadores de Nueva York, $32{,}400$ reportaron viajar más de una hora para trabajar a diario. A partir de esta información, las estadísticas determinaron que entre 16% y 16.4% de los trabajadores en el estado viajan más de una hora para trabajar todos los días en el año 2011. Si había $8{,}437{,}512$ trabajadores en toda la población, ¿qué cantidad recorrieron más de una hora para trabajar a diario?

   d. Razonar a partir de una muestra a la población se llama *hacer una inferencia* sobre una característica de la población. Identifica la estadística involucrada para hacer la inferencia en parte (c).

   e. Los datos sobre el tiempo de recorrido al trabajo sugieren que en los Estados Unidos por lo general entre 79.8% y 80% de los que se desplazan viajan solos, 10% a 10.2% comparten el coche y 4.9% to 5.1% usan transporte público. Haz una encuesta de tus compañeros de clase para averiguar cómo llega al trabajo la persona que trabaja en su familia. ¿En qué se comparan los resultados con los datos nacionales? ¿Qué podría explicar las diferencias?

Resumen de la lección

Cuando se usan datos de una población para calcular un resumen numérico, el valor se denomina característica de la población. Cuando se usan datos de una muestra para calcular un resumen numérico, el valor se llama *estadística muestral*. Las estadísticas muestrales se pueden utilizar para aprender acerca de las características de la población.

Grupo de problemas

1. El programa de almuerzo en la escuela secundaria Blake está siendo revisado para alinearse con las nuevas normas nutricionales que reducen calorías y aumentan el consumo de frutas y verduras. La administración decidió hacer un censo de todos los estudiantes de la escuela secundaria Blake, haciendo una encuesta a todos los estudiantes sobre los almuerzos escolares.

   http://frac.org/federal-foodnutrition-programs/school-breakfast-program/school-meal-nutrition-standards

   a. Nombra algunas de las preguntas que incluirías en la encuesta. Explica por qué crees que estas preguntas serían importantes de preguntar.

   b. Lee el siguiente párrafo que describe algunos de los resultados de la encuesta. A continuación, identifica las características de la población y las estadísticas muestrales.

   > Aproximadamente $\frac{3}{4}$ de los estudiantes encuestados comen el almuerzo de la escuela regularmente. La mediana de días al mes que los estudiantes de la escuela secundaria Blake comieron un almuerzo escolar fue 18 días. 36% de los estudiantes respondieron que su fruta favorita es el plátano. Los resultados de la encuesta para el aula de séptimo grado de Tanya mostraron que la mediana de días al mes que sus compañeros comieron el almuerzo de la escuela fue 22, y sólo al 20% les gusta el plátano. La ensalada fiesta fue aprobada por 78% del grupo de estudiantes que la han probado, pero cuando se puso en el menú del almuerzo, solamente al 40% de los estudiantes les gustó. De los estudiantes de séptimo grado como un entero, al 73% les gustaron las tiras de jícama picantes, pero sólo a 2 de 5 de todos los estudiantes de la escuela secundaria les gustaron.

2. Para cada una de las siguientes preguntas: (1) Describe cómo recogerías datos para responder a la pregunta y (2) describe si daría lugar a una estadística muestral o una característica de la población.

   a. ¿A dónde debe ir la clase de octavo grado en su viaje grupal?

   b. ¿Cuál es el número promedio de mascotas por familia en las familias que viven en tu ciudad?

   c. Si las personas intentaran una nueva dieta, ¿qué porcentaje tendría una mejora en sus niveles de colesterol?

   d. ¿Cuál es el promedio de calificaciones de los estudiantes que fueron aceptados en una universidad estatal en particular?

   e. ¿Cuál es un número típico de jonrones en una temporada en particular para los jugadores de béisbol de las grandes ligas?

3. Identifica una pregunta que llevaría a la recolección de datos de un conjunto dado de población y una pregunta donde los datos puedan ser una muestra de una población mayor.
   a. Todos los estudiantes en tu escuela
   b. Tu estado
4. Supongamos que los investigadores muestrearon a los asistentes de una determinada película y encontraron que la edad media fue de 17 años. Basándote en esta observación, ¿cuál de las siguientes sería más probable?
   a. La edad media de todas las personas que fueron a ver la película era 17 años.
   b. Alrededor de una cuarta parte de las personas que fueron a ver la película eran mayores de 51 años.
   c. La edad media de todas las personas que fueron a ver la película estaría probablemente en un intervalo de alrededor de 17 años, es decir, entre 15 y 19.
   d. La mediana de edad de los que asistieron a la película era de 17 años.

5. Los titulares proclamaban: "La educación impacta el sueldo en el trabajo cinco veces más que otros factores demográficos, reporta la Oficina de Censo". De acuerdo con un estudio de la Oficina de Censo de Estados Unidos, los niveles de educación tuvieron más efecto en los ingresos en un lapso de 40 años en trabajo que cualquier otro factor demográfico. www.census.gov/newsroom/releases/archives/education/cb11-153.html
   a. El artículo indicó que la incidencia estimada de los ingresos anuales entre un título profesional y una educación de octavo grado fue aproximadamente cinco veces el impacto del género, el cual era $\$13{,}000$. ¿Cuál sería la diferencia entre las ganancias anuales con un título profesional y con una educación de octavo grado?
   b. Explica si piensas que los datos provienen de una población o una muestra e identifica si es característica de la población o estadística muestral.

La historia del Censo de los EE.UU.

La palabra *censo* es de origen latino y significa impuestos. El primer censo de los Estados Unidos tuvo lugar hace más de 200 años, pero Estados Unidos no es el primer país en implementar un censo, ciertamente. Con base en los registros arqueológicos, parece que los antiguos egipcios llevaron a cabo un censo desde el año 3000 A.C.

El censo de los Estados Unidos es un mandato de la Constitución de los Estados Unidos del Artículo I, Sección 2, según el cual, en parte, "Los Representantes y los Impuestos directos se repartirán entre los distintos Estados... de acuerdo con sus respectivos Números.... El Número de Representantes no excederá uno por cada treinta mil, pero cada Estado tendrá por lo menos un Representante... ". La Constitución entonces especifica la forma de calcular el número de personas en cada estado y con qué frecuencia el censo debe llevarse a cabo.

El censo de los Estados Unidos se ha llevado a cabo cada diez años desde 1790, pero a medida que ha pasado el tiempo, nuestro censo ha evolucionado. No sólo los tipos de preguntas han cambiado, sino también la manera en que se recogen y se tabulan los datos. Originalmente, el censo sólo tenía unas pocas preguntas, el propósito de las cuales era discernir el número de personas en cada hogar y sus edades. Presumiblemente, se utilizaron estos datos para determinar el número de hombres en cada estado que estaban disponibles para ir a la guerra. Los mariscales federales estuvieron a cargo de realizar este primer censo. Después de recoger los datos de sus respectivas jurisdicciones, los alguaciles enviaron los datos al presidente Washington.

Con el paso del tiempo, más preguntas se han añadido al censo de los Estados Unidos. Hoy, el censo incluye preguntas diseñadas para recoger datos en diversos campos tales como la manufactura, el comercio y el transporte, por nombrar algunos. Los datos que alguna vez se tabularon manualmente ahora se procesan en computadoras. Los funcionarios del censo hacían visitas a las casas, pero ahora el censo se lleva a cabo principalmente a través del Servicio Postal de los Estados Unidos. Cada hogar en los Estados Unidos recibe por correo una copia del cuestionario del censo para ser completado por la cabeza de hogar, quien después los envía por correo de regreso a la oficina de censo. Las visitas a domicilio se hacen solamente a aquellas personas que no devuelven el cuestionario dentro del plazo especificado.

El censo es una parte importante de nuestra Constitución. Hoy, el censo no sólo nos dice la población de cada estado, lo que determina de este modo el número de representantes que cada estado tendrá en la Cámara de Representantes, sino que también proporciona al Gobierno de los Estados Unidos datos muy útiles para conocer la situación actual de nuestra población y cómo ha cambiado a lo largo de las décadas.

“U.S. Census History,” *essortment*, consultado el 4 de noviembre de 2014, http://www.essortment.com/census-history-20901.html.

Lección 14: Seleccionar una muestra

Trabajo en clase

Como se vio en la Lección 13, el muestreo es un concepto central en la estadística. Examinar todos los elementos de una población normalmente es imposible. Por lo tanto, la investigación y los artículos en los medios de comunicación por lo general se refieren a una "muestra" de una población. En esta lección, comenzarás a pensar acerca de cómo elegir una muestra.

Ejercicios 1–2: ¿Qué es aleatorio?

1. Anota una secuencia de cara/cruz que crees que normalmente ocurriría si lanzaras una moneda 20 veces. Compara tu secuencia a las escritas por algunos de tus compañeros de clase. ¿En qué son iguales? ¿En qué son diferentes?

2. Trabaja con un compañero, lanza una moneda 20 veces y anota la secuencia de caras y cruces que obtengas.
   a. Compara tus resultados con tus compañeros.

   b. ¿Cómo son tus resultados de lanzar la moneda de verdad diferentes de las secuencias que tú y tus compañeros de clase escribieron?

c. Toni dijo que ella podría crear un conjunto de números que serían aleatorios. ¿Qué le dirías a ella?

Ejercicios 3–11: Longitud de las palabras en el poema "Casey at the Bat"(Casey al bate)

3. Supón que quieres aprender acerca de las longitudes de las palabras en el poema en inglés "Casey at the Bat" (Casey al bate). Planeas seleccionar una muestra de ocho palabras del poema y usar estas palabras para responder a la siguiente pregunta estadística: en promedio, ¿cuán larga es una palabra en el poema? ¿Cuál es la población de interés aquí?

4. Mira el poema "Casey at the Bat" por Ernesto Thayer y selecciona ocho palabras que creas que son representativas de las palabras en el poema. Registra el número de letras de cada palabra que hayas seleccionado. Encuentra el número promedio de letras en las palabras elegidas.

5. Una muestra aleatoria es una muestra en la que cada posible muestra del mismo tamaño tiene la misma probabilidad de ser elegida. ¿Crees que el conjunto de palabras que anotaste fue al azar? ¿Por qué sí o por qué no?

6. Trabaja con un compañero, sigue las instrucciones del maestro para la elección al azar de ocho palabras. Comienza con el título del poema y cuenta las palabras con guion como una sola palabra.

   a. Escribe las ocho palabras que seleccionaste al azar y encuentra el número promedio de letras en esas palabras.

b. Compara la media de la muestra aleatoria de la media que encontraste en el Ejercicio 4. Explica cómo encontraste la media para cada muestra.

7. Como clase, comparen las medias del Ejercicio 4 y las medias del Ejercicio 6. Tu maestro proporcionará una gráfica para comparar las medias. Escribe tu media del Ejercicio 4 y tu media del Ejercicio 6 en esta gráfica.

8. ¿Crees que las medias del Ejercicio 4 o las medias del Ejercicio 6 son más representativas de la media de todas las palabras en el poema? Explica tu elección.

9. La media real de las palabras en el poema "Casey at the Bat" es 4.2 letras. Basándote en el hecho de que la media poblacional tiene 4.2 letras, ¿son las medias del Ejercicio 4 o las medias del Ejercicio 6 una mejor representación de la media de la población? Explica tu respuesta.

10. ¿Cómo se compara la media poblacional de las 4.2 letras con la media de la muestra aleatoria del Ejercicio 6 y con la media que encontraste en el Ejercicio 4?

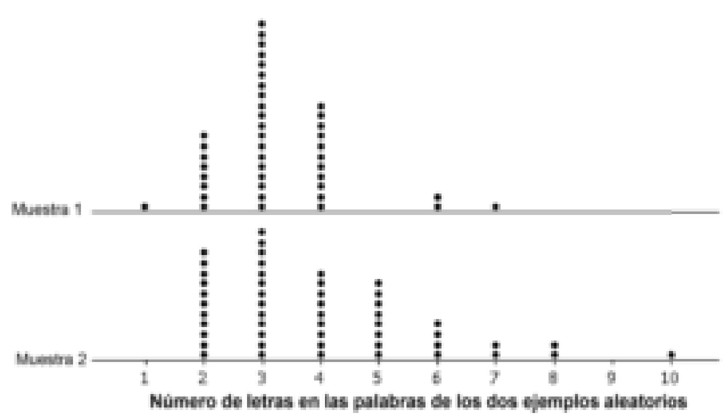
11. Resume cómo estimarías el número promedio de letras en las palabras de otro poema basándote en lo aprendido en los ejercicios anteriores.

Grupo de problemas

1. ¿Alguno de los siguientes ejemplos proporcionan una muestra aleatoria de letras utilizadas en el texto del libro de *Harry Potter y la piedra filosofal*, de J.K. Rowling? Explica tu razonamiento.
   a. Utiliza la primera letra de cada palabra de un párrafo elegido al azar.
   b. Enumera todas las letras de las palabras en un párrafo del libro, corta los números y ponlos en una bolsa. Después, selecciona un conjunto aleatorio de números de la bolsa para identificar qué letras vas a utilizar.
   c. Haz que un familiar o un amigo escriba una lista de sus palabras favoritas y cuenten el número de veces que cada una de las letras aparece.

2. Indica si las siguientes son muestras aleatorias de la población dada y explica por qué o por qué no.
   a. Población: Todos los estudiantes en la escuela; la muestra incluye uno de cada cinco estudiantes en el pasillo fuera de la clase.
   b. Población: Los estudiantes en tu clase; la muestra se compone de los estudiantes que tienen la letra S en sus apellidos.
   c. Población: Los estudiantes en tu clase; la muestra se selecciona al poner sus nombres en un sombrero y extraer la muestra del sombrero.
   d. Población: Las personas en tu vecindario; la muestra incluye los que están fuera de la zona en 6:00 p.m.
   e. Población: Todo el mundo en una habitación; la muestra se selecciona haciendo que todos tiren una moneda al aire y los que resultan en cara son la muestra.

3. Considera las dos distribuciones de muestra del número de letras en las palabras elegidas al azar que se muestran a continuación:



   a. Describe cada distribución utilizando términos estadísticos tanto como sea posible.
   b. ¿Crees que las dos muestras provienen del mismo poema? ¿Por qué sí o por qué no?

4. ¿Qué preguntas acerca de las muestras y las poblaciones querrías preguntar si vieras los siguientes titulares de un periódico?
   a. "Paleta de durazno es el sabor principal de acuerdo con 8 de cada 10 personas."
   b. “¡Candidato X parece ser el ganador! 10 de cada 12 personas indican que van a votar por el candidato X."
   c. “Los estudiantes trabajan en exceso. Más de la mitad de 400 personas encuestadas piensan que los estudiantes pasan demasiadas horas con la tarea."
   d. "Las películas de acción/aventura fueron seleccionadas cómo el tipo de película favorita por un abrumador 75% de los encuestados."

Lección 15: Muestreo aleatorio

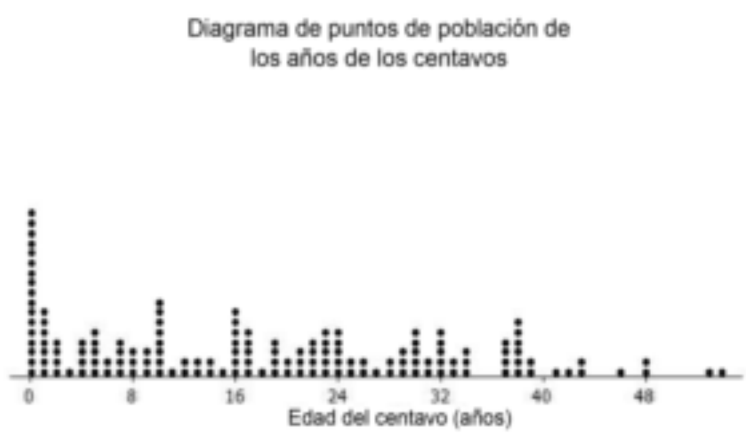
Trabajo en clase

En esta lección, se investigará la toma de muestras aleatorias y cómo las muestras aleatorias de la misma población pueden variar.

Ejercicios 1–5: Muestreo de centavos

1. ¿Crees que diferentes muestras aleatorias de la misma población serán bastante similares? Explica tu razonamiento.

2. La siguiente gráfica muestra el número de años desde que fue acuñado (la edad del centavo) para 150 centavos que JJ había recogido durante el año pasado. Describe la forma, el centro y la dispersión de la distribución.



3. Coloca diez puntos en la recta numérica que piensas que podrían ser la distribución de una muestra de 10 centavos del frasco.

Edad del centavo (años)

4. Selecciona una muestra aleatoria de 10 centavos y haz un diagrama de puntos de las edades. Describe la distribución de la edad de los centavos en tu muestra. ¿Cómo se compara a la distribución de la población?

5. Compara tu distribución de la muestra a las distribuciones de la muestra en el pizarrón.

   a. ¿Qué observas?

   b. ¿Cómo funciona tu distribución de la muestra en comparación con aquellas en el pizarrón?

Ejercicios 6–9: Precios de comestibles y redondeo

6. Mira algunos de los precios de comestibles para esta actividad. Considera la siguiente pregunta estadística: "¿Los propietarios de tiendas fijan el precio de la mercancía en centavos que están más cerca de un valor en dólares más alto o un valor más bajo del dólar?" Describe un plan que podría responder esa pregunta que no implique trabajar con todos los 100 artículos.

7. ¿Los propietarios de tiendas fijan el precio de la mercancía en centavos que están más cerca de un valor en dólares más alto o un valor más bajo del dólar? Para investigar esta pregunta en una situación, verás los precios de algunos comestibles en folletos semanales y publicidad para las tiendas de comestibles locales.

   a. ¿Cómo redondeas $\$3.49$ y $\$4.99$ al dólar más cercano?

   b. Si el precio de venta fue de tres por $\$4.35$, ¿cuánto se esperaría pagar por un artículo?

   c. ¿Crees que los precios de comestibles podrían redondearse hacia arriba o hacia abajo? Explica tu razonamiento.

8. Sigue las instrucciones de tu maestro para recortar los artículos y sus precios a partir de los folletos semanales y ponlos en una bolsa. Selecciona una muestra aleatoria de 25 artículos sin reemplazo y registra los artículos y tus precios en la tabla a continuación.

Artículo	Precio	Redondeado

Artículo	Precio	Redondeado

Ejemplo de una tabla sugerida:

Estudiante	Número de veces que los precios se redondearon al valor más alto	Porcentaje de precios redondeados al valor más alto	Número de veces que los precios se redondearon al valor más bajo
Bettina	20	80%	5

9. Redondea cada uno de los precios en tu muestra al costo del dólar más cercano y cuenta el número de veces que redondeaste hacia arriba y el número de veces que redondeaste hacia abajo.

   a. Dados los resultados de la muestra, cómo respondes a la pregunta: ¿Los precios de los comestibles en los anuncios semanales en el supermercado local son más cercanos al dólar más alto o al dólar más bajo?

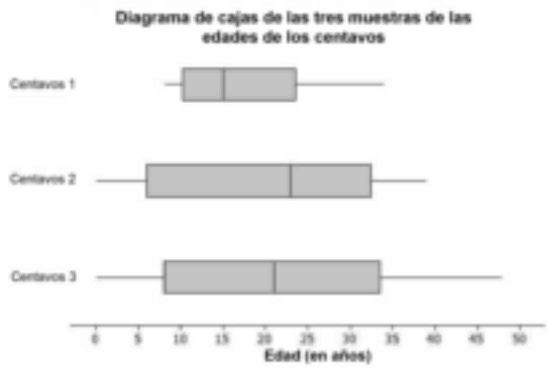
   b. Comparte tus resultados con tus compañeros de clase que utilizaron el mismo folleto o anuncios. En cuanto a los resultados de varias muestras diferentes, ¿cómo respondes a la pregunta en parte (a)?

   c. Identifica la población, muestra y estadística muestral que se usó para responder a la pregunta estadística.

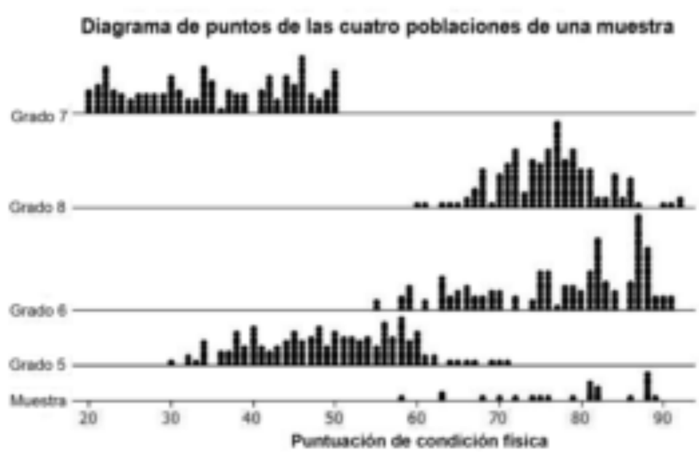
   d. Bettina dice que más de la mitad de todos los precios en el supermercado se redondean hacia arriba. ¿Qué le dirías a ella?

Grupo de problemas

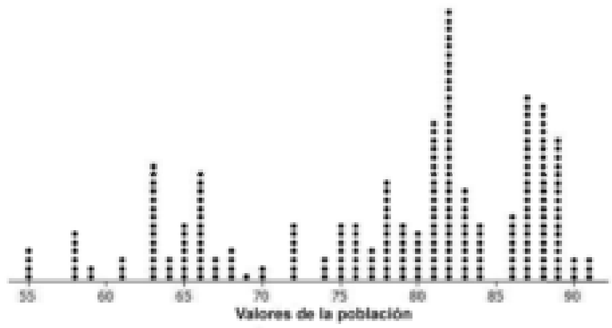
1. Observa la distribución de años desde que los centavos fueron acuñados a partir del Ejemplo 1. ¿Cuáles de los siguientes diagramas de caja parecen que no podrían haber venido de una muestra aleatoria de esa distribución? Explica tu razonamiento.



2. Dada la siguiente muestra de puntuaciones en una prueba de aptitud física, ¿de cuál de las siguientes poblaciones se pudo haber elegido la muestra? Explica tu razonamiento.

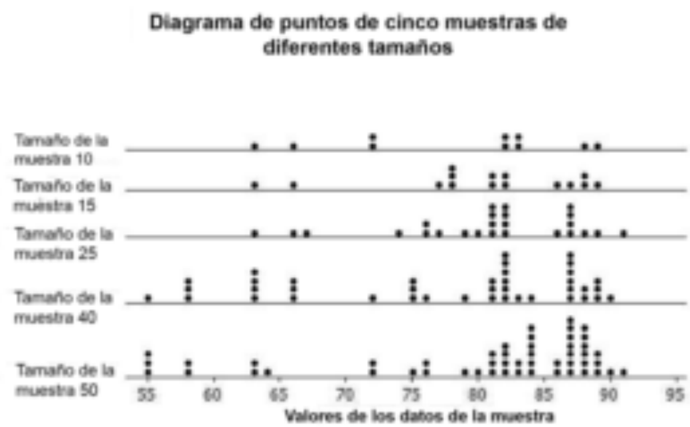


3. Considera la distribución a continuación:



a. ¿Cómo esperarías que fuera la apariencia de la distribución de una muestra aleatoria de tamaño 10 de esta población?

b. Las muestras aleatorias de diferentes tamaños que se seleccionaron a partir de la población en parte (a) se muestran a continuación. ¿Cómo se compara tu respuesta a parte (a) con estas muestras de tamaño 10?



c. ¿Por qué es razonable pensar que estas muestras podrían haber venido de la población de arriba?

d. ¿Qué observas acerca de las distribuciones de la muestra a medida que aumenta el tamaño de la muestra?

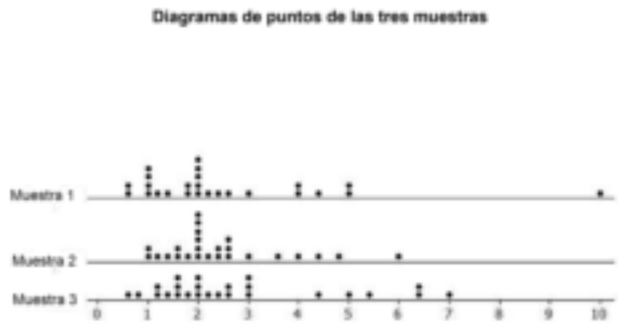
4. Basándote en tu muestra aleatoria de los precios de Ejercicio 6, responde a las siguientes preguntas:

a. Parece que muchos de los precios terminan en 9. ¿Tus resultados de la muestra apoyan esa afirmación? ¿Por qué sí o por qué no?

b. ¿Cuál es el precio típico de los artículos en tu muestra? Explica cómo encontraste el precio y por qué elegiste ese método.

5. Las distribuciones de la muestra de precios de tres muestras aleatorias diferentes de 25 artículos de una tienda de comestibles se muestran a continuación.

   a. ¿Cómo se comparan las distribuciones?



   b. Thomas dice que si él cuenta los artículos en su carro en esa tienda de comestibles y multiplica por $\$2.00$, tendrá un buen estimado de la cantidad que tendrá que pagar. ¿Qué opinas de su estrategia?

Lección 16: Métodos de selección de una muestra aleatoria

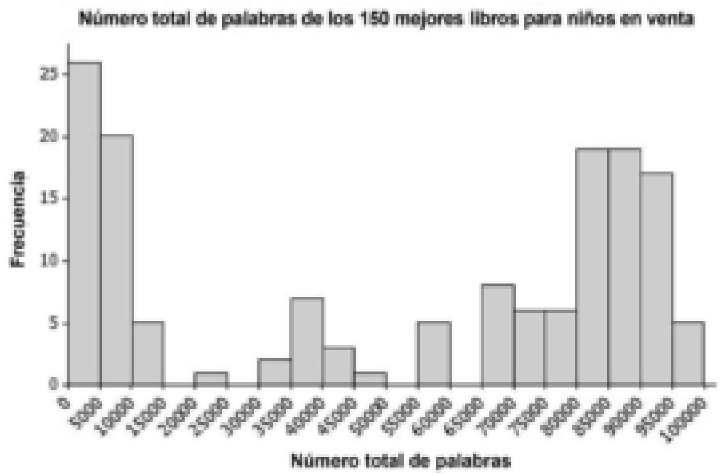
Trabajo en clase

En esta lección obtendrás números aleatorios para seleccionar una muestra aleatoria. También diseñarás un plan para la selección de una muestra aleatoria para responder a una pregunta estadística acerca de una población.

Ejemplo 1: Muestreo de libros infantiles

¿Cuál es el libro más largo que has leído? *El Hobbit* tiene 95,022 palabras y *El gato con sombrero* tiene 830 palabras. Los libros populares varían en el número de palabras que tienen, no solo en el número de palabras diferentes, sino en el número total de palabras. La tabla de la página siguiente muestra el número total de palabras en algunos de esos libros. El histograma muestra el número total de palabras en los 150 libros infantiles más vendidos con menos de 100,000 palabras.

Libro	Palabras		Libro	Palabras		Libro	Palabras
Belleza negra	59,635		*Charlie y la fábrica de chocolate*	30,644		*El Hobbit*	95,022
El guardián en el centeno	73,404		*Viejo gritón*	35,968		*Judy Moody estaba de un humor*	11,049
Las aventuras de Tom Sawyer	69,066		*El gato con sombrero*	830		*La isla del tesoro*	66,950
El jardín secreto	80,398		*Huevos verdes con jamón*	702		*Magic Tree House: Leones en el almuerzo*	5,313
El ratón y la motocicleta	22,416		*Osito*	1,630		*Harry Potter y la piedra filosofal*	77,325
El viento en los sauces	58,424		*La roja insignia del valor*	47,180		*Harry Potter y la cámara secreta*	84,799
El dragón de papá	7,682		*Diario de Ana Frank*	82,762		*Junie B. Jones y el estúpido autobús hediondo*	6,570
La rana y el sapo todo el año	1,727		*La medianoche para Charlie Bone*	65,006		*Montañas blancas*	44,763
Libro de los Tres	46,926		*El león, la bruja y el ropero*	36,363		*Doble caramelo*	38,860



Ejercicios 1–2

1. A partir de la tabla, selecciona dos libros con los que estás familiarizado y describe sus lugares en la distribución de datos mostrada en el histograma.

2. Pon puntos en la recta numérica a continuación que puedan representar una muestra aleatoria de tamaño 10 a partir del número de la distribución de las palabras en la página anterior.

Ejemplo 2: Uso de números aleatorios para seleccionar una muestra

El histograma indica las diferencias en el número de palabras de la colección de 150 libros. ¿Cuántas palabras son típicas de un libro infantil superventas? Responder a esta pregunta implica la recopilación de datos y habría variabilidad en los datos. Esto hace que la pregunta sea una pregunta estadística. Piensa en los 150 libros utilizados para crear el histograma en la página anterior como una población. ¿Cómo recolectarías los datos para determinar el número típico de las palabras de los libros de esta población?

¿Cómo elegirías una muestra aleatoria de la colección de 150 libros discutida en esta lección?

Los datos para el número de palabras en los 150 libros infantiles más vendidos se enumeran a continuación. Selecciona una muestra aleatoria de la cantidad de palabras para 10 libros.

Libros 1–10	59,635	82,762	92,410	75,340	8,234	59,705	92,409	75,338	8,230	82,768
Libros 11–20	73,404	65,006	88,250	2,100	81,450	72,404	88,252	2,099	81,451	65,011
Libros 21–30	69,066	36,363	75,000	3,000	80,798	69,165	75,012	3,010	80,790	36,361
Libros 31–40	80,398	95,022	71,200	3,250	81,450	80,402	71,198	3,252	81,455	95,032
Libros 41–50	22,416	11,049	81,400	3,100	83,475	22,476	81,388	3,101	83,472	11,047
Libros 51–60	58,424	66,950	92,400	2,750	9,000	58,481	92,405	2,748	9,002	66,954
Libros 61–70	7,682	5,313	83,000	87,000	89,170	7,675	83,021	87,008	89,167	5,311
Libros 71–80	1,727	77,325	89,010	862	88,365	1,702	89,015	860	88,368	77,328
Libros 81–90	46,926	84,799	88,045	927	89,790	46,986	88,042	926	89,766	84,796
Libros 91–100	30,644	6,570	90,000	8,410	91,010	30,692	90,009	8,408	91,015	6,574
Libros 101–110	35,968	44,763	89,210	510	9,247	35,940	89,213	512	9,249	44,766
Libros 111–120	830	8,700	92,040	7,891	83,150	838	92,037	7,889	83,149	8,705
Libros 121–130	702	92,410	94,505	38,860	81,110	712	94,503	87,797	81,111	92,412
Libros 131–140	1,630	88,250	97,000	7,549	8,245	1,632	97,002	7,547	8,243	88,254
Libros 141–150	47,180	75,000	89,241	81,234	8,735	47,192	89,239	81,238	8,739	75,010

Ejercicios 3–6

3. Sigue las instrucciones de tu maestro para generar un conjunto de 10 números aleatorios. Encuentra el número total de palabras correspondientes a cada libro identificadas por tus números aleatorios.

4. Elije otras dos muestras aleatorias diferentes de tamaño 10 de los datos y haz un diagrama de puntos de cada una de las tres muestras.

5. Si el maestro elige al azar 10 libros de tu lista de lectura de verano, ¿sería probable que muchos libros contengan muchas palabras? Explica tu razonamiento usando términos estadísticos.

6. ¿Tus muestras se compararían con las muestras de tus compañeros de clase? ¿crees que tu respuesta del Ejercicio 5 cambiaría? ¿Por qué sí o por qué no?

Ejercicios 7–9: Un estudio estadístico de equilibrio y grado

7. ¿Es una pregunta estadística la siguiente pregunta: Los estudiantes de sexto grado o séptimo grado tienden a tener mejor equilibrio?

8. La clase de Berthio decidió medir el equilibrio para averiguar cuánto tiempo pueden pararse las personas altas en un solo pie.
   a. ¿Cómo reformularías la pregunta del Ejercicio 7 para crear una pregunta estadística usando esta definición de equilibrio? Explica tu razonamiento.

   b. ¿Qué debería hacer la clase para ser coherente en la forma en que recoge los datos si se pide a las personas pararse en un pie y medir el tiempo?

9. Trabaja con tu clase para idear un plan para seleccionar una muestra aleatoria de estudiantes de sexto grado y una muestra aleatoria de séptimo grado para medir su equilibrio mediante el método de Berthio. Después, escribe un párrafo que describa cómo vas a recoger datos para determinar si existe una diferencia entre el tiempo de sexto grado y séptimo grado para poder pararse en un pie. Tu plan debe responder a las siguientes preguntas:
   a. ¿Cuál es la población? ¿Cómo se seleccionarían muestras de la población? ¿Por qué es importante que sean muestras aleatorias?

   b. ¿Cómo se realizará la actividad?

   c. ¿Qué estadísticas muestrales vas a calcular y cómo vas a mostrar y analizar los datos?

d. ¿Qué aceptarías cómo evidencia de que realmente existe una diferencia en el tiempo que el sexto grado puede pararse en un pie en comparación con el séptimo grado?

Grupo de problemas

1. Las sugerencias a continuación para saber cómo elegir una muestra aleatoria de estudiantes en tu escuela se hicieron y vetaron. Explica por qué piensas cada una fue vetada.
   a. Usa cada cinco personas que se ven en el pasillo antes de que comience la clase.
   b. Utiliza a todos los estudiantes que toman matemáticas al mismo tiempo que tu clase se reúne.
   c. Haz que los estudiantes que llegan a la escuela temprano hagan la actividad antes de que empiecen las clases.
   d. Haz que todos en la clase encuentren dos amigos para estar en la muestra.

2. Un maestro decidió recoger la tarea de una muestra aleatoria de sus estudiantes en lugar de corregir todas las tareas todos los días.
   a. Describe cómo se podría elegir una muestra aleatoria de cinco estudiantes de tu clase de 35 estudiantes.
   b. Supón que cada día por 75 días durante todo el semestre se elige una muestra aleatoria de cinco estudiantes. ¿Crees que algunos estudiantes nunca se seleccionarán? ¿Por qué sí o por qué no?

3. Piensa de nuevo en las lecciones anteriores en las que elegiste una muestra aleatoria. Describe cómo se podría haber utilizado un generador de números aleatorios para seleccionar una muestra aleatoria en cada caso.
   a. Una muestra aleatoria de las palabras en el poema "Casey at the Bat."
   b. Una muestra aleatoria de los precios de comestibles en un folleto semanal.

4. Sofía se decidió por un plan diferente para la selección de una muestra aleatoria de la población de 150 libros infantiles de mayor venta del ejemplo 2. Generó diez números aleatorios entre 1 y $100{,}000$ para saber el posible número de páginas en cualquiera de los libros. Entonces, se encontró con los libros que tenían el número de páginas especificado en la muestra. ¿Qué le dirías a Sofía?

5. Encuentra un ejemplo de un periódico, una revista u otra fuente que utilice una muestra. Describe la población, la muestra, la estadística muestral, cómo crees que la muestra podría haber sido elegida y si piensas o no que la muestra fue aleatoria.

Lección 17: Variabilidad en el muestreo

Trabajo en clase

Ejemplo 1: Estimación de una media poblacional

Los propietarios de un gimnasio han estado manteniendo un registro de cuánto tiempo pasa cada persona en el gimnasio. Ochocientos de estos tiempos (en minutos) se muestran en las tablas de población que se encuentran al final de la lección. Estos 800 lapsos serán la *población* que se va a investigar en esta lección.

Mira los valores de la población. ¿Puedes encontrar el lapso de tiempo en el gimnasio más largo en la población? ¿Se puede encontrar el más corto?

En promedio, ¿más o menos cuánto tiempo crees que las personas pasan en el gimnasio? En otras palabras, con sólo mirar los números en las dos tablas, haz un estimado de la *media poblacional*.

Puedes encontrar la media poblacional escribiendo todos los 800 números en una calculadora o una computadora, sumarlos y dividirlos entre 800. Esto sería extremadamente lento y por lo general no es posible medir todos los valores en una población.

En vez de hacer un cálculo utilizando todos los valores de la población, vamos a utilizar una *muestra aleatoria* para encontrar la media de la muestra. La media de la muestra se utilizará entonces como una estimación de la media poblacional.

Ejemplo 2: Selección de una muestra mediante una tabla de dígitos aleatorios

La tabla de dígitos aleatorios que se incluye en esta lección se utiliza para seleccionar elementos de una población a fin de producir una muestra aleatoria de la población. La lista de dígitos se determina mediante un programa informático que simula una selección aleatoria de los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9. Imagina que cada uno de estos dígitos se escribe en una tira de papel y se coloca en una bolsa. Después de mezclar bien la bolsa, una tira de papel se toma y su dígito se registra en esta lista de dígitos aleatorios. El papel se devuelve a la bolsa y se selecciona otra tira. El dígito en esta tira se registra y regresa después a la bolsa. El proceso se repite una y otra vez. La lista resultante de dígitos se llama una *tabla de números aleatorio*.

¿Cómo podrías usar una tabla de números aleatorios para tomar una muestra aleatoria?

Paso 1: Coloca la tabla de dígitos aleatorios delante de ti. Sin mirar la página, coloca el extremo del borrador del lápiz en algún lugar de la tabla. Comienza a usar la tabla de dígitos aleatorios en el número más cercano donde tu borrador tocó el papel. Este dígito y los dos siguientes especifican que la observación de las tablas de población será la primera observación en la muestra.

Por ejemplo, supón que el borrador de tu lápiz se coloca en el número doce en la fila 3 de la tabla de dígitos aleatorios. Este número es 5 y los dos números siguientes son 1 y 4. Esto significa que la primera observación en la muestra es el número de la observación 514 de la población. Encuentra el número de observaciones 514 en la tabla de población. Ve a la fila 51 y mueve al encabezado de la columna "4." Esta observación es 53, así que la primera observación en la muestra es 53.

Si el número de la tabla de números aleatorios es un número superior a 800, se descarta y se usan los siguientes tres dígitos en la tabla.

Paso 2: Sigue usando la tabla de dígitos aleatorios desde el punto que llegaste y selecciona las otras cuatro observaciones en la muestra, como lo hiciste en el paso 1.

Por ejemplo, continuando desde la posición en el ejemplo dado en Paso 1:

- El siguiente número de la tabla de dígitos aleatorios es 716 y la observación 716 es 63.
- El siguiente número de la tabla de dígitos aleatorios es 565 y la observación 565 es 31.
- El siguiente número de la tabla de dígitos aleatorios es 911 y no hay observación 911. Por lo tanto, se ignoran estos tres dígitos.
- El siguiente número de la tabla de dígitos aleatorios es 928 y no hay observación 928. Por lo tanto, se ignoran estos tres dígitos.
- El siguiente número de la tabla de dígitos aleatorios es 303 y la observación 303 es 70.
- El siguiente número de la tabla de dígitos aleatorios es 677 y la observación 677 es 42.

Ejercicios 1–4

Inicialmente, tendrás que elegir sólo cinco valores de la población para formar la muestra. Se trata de un tamaño de muestra muy pequeño, pero es un buen punto de partida para comprender las ideas de esta lección.

1. Utiliza la tabla de números aleatorios para seleccionar cinco valores de la población de lapsos. ¿Cuáles son las cinco observaciones en la muestra?

2. Para la muestra que has seleccionado, calcula la media de muestra.

3. Has seleccionado una muestra aleatoria y calculado la media de la muestra con el fin de estimar la media poblacional. ¿Crees que la media de estas cinco observaciones es exactamente correcta para la media poblacional? ¿Podría la media poblacional ser mayor que el número que has calculado? ¿Podría la media poblacional ser menor que el número que has calculado?

4. En la práctica, sólo se toma una muestra con el fin de estimar una característica de la población. Sin embargo, para los fines de esta lección, supón que vas a tomar otra muestra aleatoria de la misma población de tiempo en el gimnasio. ¿Podría la nueva media de la muestra estar más cerca de la media poblacional significar la media de estas cinco observaciones? ¿Podría estar más lejos de la media poblacional?

Ejercicios 5–7

Como clase, ahora investiga la variabilidad de la muestra tomando varias muestras de la misma población. Cada muestra tendrá una media de la muestra diferente. Esta variación proporciona un ejemplo de la variabilidad en el muestreo.

5. Coloca la tabla de dígitos aleatorios delante tuyo y sin mirar la página, coloca el extremo del borrador del lápiz en algún lugar de la tabla de números aleatorios. Comienza a usar la tabla de dígitos aleatorios en el número más cercano a donde tu borrador haga contacto con el papel. Este dígito y los dos siguientes especificarán qué observación de las tablas de población será la primera observación en tu muestra. Anota este número de tres dígitos y el valor de datos correspondiente de la población en el espacio a continuación.

6. Continúa moviéndote hacia la derecha en la tabla de dígitos aleatorios desde el lugar donde acabaste en el Ejercicio 5. Utiliza tres dígitos a la vez. Cada conjunto de tres dígitos especifica qué observación en la población es el siguiente número en tu muestra. Continúa hasta que tengas cuatro observaciones más y escribe estos cuatro valores en el espacio a continuación.

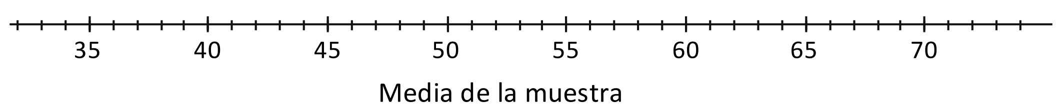
7. Calcula la media de los cinco valores que forman la muestra. Redondea tu respuesta a la décima más cercana. Muestra tu trabajo y tu media muestral en el espacio a continuación.

Ejercicios 8–11

Ahora utilizarás las medias de la muestra del Ejercicio 7 de toda la clase para hacer un diagrama de puntos.

8. Escribe las medias de la muestra para todos los miembros de la clase en el espacio a continuación.

9. Usa todas las medias de la muestra para hacer un diagrama de puntos utilizando el eje dado a continuación. (Recuerda, si tienes valores cercanos o que se repiten, apila los puntos uno encima del otro).



10. ¿Qué ves en el diagrama de puntos que demuestra la variabilidad en el muestreo?

11. Recuerda que en la práctica sólo se toma una muestra. (En esta lección, se tomaron varias muestras con el fin de demostrar el concepto de variabilidad en el muestreo). Supongamos que un estadístico planea tomar una muestra aleatoria de tamaño 5 de la población del tiempo que se pasa en el gimnasio y utilizará la media de la muestra cómo una estimación de la media poblacional. Aproximadamente, ¿cuánta distancia de la media de la muestra de la media poblacional puede esperar el estadístico?

Población

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	45	58	49	78	59	36	52	39	70	51
01	50	45	45	66	71	55	65	33	60	51
02	53	83	40	51	83	57	75	38	43	77
03	49	49	81	57	42	36	22	66	68	52
04	60	67	43	60	55	63	56	44	50	58
05	64	41	67	73	55	69	63	46	50	65
06	54	58	53	55	51	74	53	55	64	16
07	28	48	62	24	82	51	64	45	41	47
08	70	50	38	16	39	83	62	50	37	58
09	79	62	45	48	42	51	67	68	56	78
10	61	56	71	55	57	77	48	65	61	62
11	65	40	56	47	44	51	38	68	64	40
12	53	22	73	62	82	78	84	50	43	43
13	81	42	72	49	55	65	41	92	50	60
14	56	44	40	70	52	47	30	9	58	53
15	84	64	64	34	37	69	57	75	62	67
16	45	58	49	78	59	36	52	39	70	51
17	50	45	45	66	71	55	65	33	60	51
18	53	83	40	51	83	57	75	38	43	77
19	49	49	81	57	42	36	22	66	68	52
20	60	67	43	60	55	63	56	44	50	58
21	64	41	67	73	55	69	63	46	50	65
22	54	58	53	55	51	74	53	55	64	16
23	28	48	62	24	82	51	64	45	41	47
24	70	50	38	16	39	83	62	50	37	58
25	79	62	45	48	42	51	67	68	56	78
26	61	56	71	55	57	77	48	65	61	62
27	65	40	56	47	44	51	38	68	64	40
28	53	22	73	62	82	78	84	50	43	43
29	81	42	72	49	55	65	41	92	50	60
30	56	44	40	70	52	47	30	9	58	53
31	84	64	64	34	37	69	57	75	62	67
32	45	58	49	78	59	36	52	39	70	51
33	50	45	45	66	71	55	65	33	60	51
34	53	83	40	51	83	57	75	38	43	77
35	49	49	81	57	42	36	22	66	68	52
36	60	67	43	60	55	63	56	44	50	58
37	64	41	67	73	55	69	63	46	50	65
38	54	58	53	55	51	74	53	55	64	16
39	28	48	62	24	82	51	64	45	41	47

Población (continuación)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40	53	70	59	62	33	31	74	44	46	68
41	37	51	84	47	46	33	53	54	70	74
42	35	45	48	45	56	60	66	60	65	57
43	42	81	67	64	60	79	46	48	67	56
44	41	21	41	58	48	38	50	53	73	38
45	35	28	43	43	55	39	75	45	68	36
46	64	31	31	40	84	79	47	63	48	46
47	34	36	54	61	33	16	50	60	52	55
48	53	52	48	47	77	37	66	51	61	64
49	40	44	45	22	36	64	50	49	64	39
50	45	69	67	33	55	61	62	38	51	43
51	55	39	46	56	53	50	44	42	40	60
52	11	36	56	69	72	73	71	48	58	52
53	81	47	36	54	81	59	50	42	80	69
54	40	43	30	54	61	13	73	65	52	40
55	71	78	71	61	54	79	63	47	49	73
56	53	70	59	62	33	31	74	44	46	68
57	37	51	84	47	46	33	53	54	70	74
58	35	45	48	45	56	60	66	60	65	57
59	42	81	67	64	60	79	46	48	67	56
60	41	21	41	58	48	38	50	53	73	38
61	35	28	43	43	55	39	75	45	68	36
62	64	31	31	40	84	79	47	63	48	46
63	34	36	54	61	33	16	50	60	52	55
64	53	52	48	47	77	37	66	51	61	64
65	40	44	45	22	36	64	50	49	64	39
66	45	69	67	33	55	61	62	38	51	43
67	55	39	46	56	53	50	44	42	40	60
68	11	36	56	69	72	73	71	48	58	52
69	81	47	36	54	81	59	50	42	80	69
70	40	43	30	54	61	13	73	65	52	40
71	71	78	71	61	54	79	63	47	49	73
72	53	70	59	62	33	31	74	44	46	68
73	37	51	84	47	46	33	53	54	70	74
74	35	45	48	45	56	60	66	60	65	57
75	42	81	67	64	60	79	46	48	67	56
76	41	21	41	58	48	38	50	53	73	38
77	35	28	43	43	55	39	75	45	68	36
78	64	31	31	40	84	79	47	63	48	46
79	34	36	54	61	33	16	50	60	52	55

Tabla de dígitos aleatorios

Fila																				
1	6	6	7	2	8	0	0	8	4	0	0	4	6	0	3	2	2	4	6	8
2	8	0	3	1	1	1	1	2	7	0	1	9	1	2	7	1	3	3	5	3
3	5	3	5	7	3	6	3	1	7	2	5	5	1	4	7	1	6	5	6	5
4	9	1	1	9	2	8	3	0	3	6	7	7	4	7	5	9	8	1	8	3
5	9	0	2	9	9	7	4	6	3	6	6	3	7	4	2	7	0	0	1	9
6	8	1	4	6	4	6	8	2	8	9	5	5	2	9	6	2	5	3	0	3
7	4	1	1	9	7	0	7	2	9	0	9	7	0	4	6	2	3	1	0	9
8	9	9	2	7	1	3	2	9	0	3	9	0	7	5	6	7	1	7	8	7
9	3	4	2	2	9	1	9	0	7	8	1	6	2	5	3	9	0	9	1	0
10	2	7	3	9	5	9	9	3	2	9	3	9	1	9	0	5	5	1	4	2
11	0	2	5	4	0	8	1	7	0	7	1	3	0	4	3	0	6	4	4	4
12	8	6	0	5	4	8	8	2	7	7	0	1	0	1	7	1	3	5	3	4
13	4	2	6	4	5	2	4	2	6	1	7	5	6	6	4	0	8	4	1	2
14	4	4	9	8	7	3	4	3	8	2	9	1	5	3	5	9	8	9	2	9
15	6	4	8	0	0	0	4	2	3	8	1	8	4	0	9	5	0	9	0	4
16	3	2	3	8	4	8	8	6	2	9	1	0	1	9	9	3	0	7	3	5
17	6	6	7	2	8	0	0	8	4	0	0	4	6	0	3	2	2	4	6	8
18	8	0	3	1	1	1	1	2	7	0	1	9	1	2	7	1	3	3	5	3
19	5	3	5	7	3	6	3	1	7	2	5	5	1	4	7	1	6	5	6	5
20	9	1	1	9	2	8	3	0	3	6	7	7	4	7	5	9	8	1	8	3
21	9	0	2	9	9	7	4	6	3	6	6	3	7	4	2	7	0	0	1	9
22	8	1	4	6	4	6	8	2	8	9	5	5	2	9	6	2	5	3	0	3
23	4	1	1	9	7	0	7	2	9	0	9	7	0	4	6	2	3	1	0	9
24	9	9	2	7	1	3	2	9	0	3	9	0	7	5	6	7	1	7	8	7
25	3	4	2	2	9	1	9	0	7	8	1	6	2	5	3	9	0	9	1	0
26	2	7	3	9	5	9	9	3	2	9	3	9	1	9	0	5	5	1	4	2
27	0	2	5	4	0	8	1	7	0	7	1	3	0	4	3	0	6	4	4	4
28	8	6	0	5	4	8	8	2	7	7	0	1	0	1	7	1	3	5	3	4
29	4	2	6	4	5	2	4	2	6	1	7	5	6	6	4	0	8	4	1	2
30	4	4	9	8	7	3	4	3	8	2	9	1	5	3	5	9	8	9	2	9
31	6	4	8	0	0	0	4	2	3	8	1	8	4	0	9	5	0	9	0	4
32	3	2	3	8	4	8	8	6	2	9	1	0	1	9	9	3	0	7	3	5
33	6	6	7	2	8	0	0	8	4	0	0	4	6	0	3	2	2	4	6	8
34	8	0	3	1	1	1	1	2	7	0	1	9	1	2	7	1	3	3	5	3
35	5	3	5	7	3	6	3	1	7	2	5	5	1	4	7	1	6	5	6	5
36	9	1	1	9	2	8	3	0	3	6	7	7	4	7	5	9	8	1	8	3
37	9	0	2	9	9	7	4	6	3	6	6	3	7	4	2	7	0	0	1	9
38	8	1	4	6	4	6	8	2	8	9	5	5	2	9	6	2	5	3	0	3
39	4	1	1	9	7	0	7	2	9	0	9	7	0	4	6	2	3	1	0	9
40	9	9	2	7	1	3	2	9	0	3	9	0	7	5	6	7	1	7	8	7

Resumen de la lección

Una característica de la población se estima tomando una muestra aleatoria de la población y calculando el valor de una estadística para la muestra. Por ejemplo, una media de la población se estima mediante la selección de una muestra aleatoria de la población y el cálculo de la media de la muestra.

El valor de la estadística muestral (por ejemplo, la media de la muestra) variará dependiendo de la muestra aleatoria que se haya seleccionado. Esta variación de una muestra a los valores de la estadística de la muestra se llama *variabilidad en el muestreo*.

Grupo de problemas

1. Yousef tiene la intención de comprar un coche. Desea estimar la media del rendimiento de combustible (en millas, por galón) de todos los coches disponibles en este momento. Yousef selecciona una muestra aleatoria de 10 coches y busca su rendimiento de combustible en Internet.
   Los resultados se muestran a continuación.

   $$22 \quad 25 \quad 29 \quad 23 \quad 31 \quad 29 \quad 28 \quad 22 \quad 23 \quad 27$$

   a. Yousef estima la media del rendimiento de combustible de todos los coches mediante el cálculo de la media para su muestra. Calcula la media de la muestra y registra tu respuesta (Asegúrate de mostrar tu trabajo).
   b. En la práctica, sólo se toma una muestra para estimar una característica de la población. Sin embargo, si Yousef tomara otra muestra aleatoria de 10 coches de la misma población, ¿sería probable que obtuviera el mismo valor para la media de la muestra?
   c. ¿Qué pasaría si Yousef tomara muchas muestras aleatorias de 10 coches? ¿Las medias de la muestra serán las mismas?
   d. Utilizando este ejemplo, explica lo que significa la variabilidad en el muestreo.

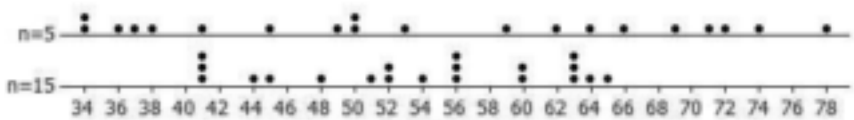
2. Piensa en el número promedio de hermanos (hermanos y hermanas) para todos los estudiantes en tu escuela.
   a. ¿Cuál crees que sea el valor aproximado del número promedio de hermanos de la población de todos los estudiantes en tu escuela?
   b. ¿Cómo se puede encontrar un mejor estimado de la media de esta población?
   c. Supón que ahora se ha seleccionado una muestra aleatoria de estudiantes de tu escuela. Has preguntado a todos los estudiantes en tu muestra cuántos hermanos tienen. ¿Cómo vas a calcular la media de la muestra?
   d. Si se hubiera tomado una muestra diferente, ¿sería la media de la muestra del mismo valor?
   e. Hay muchas muestras diferentes de estudiantes que podrían haber sido seleccionadas. Estas muestras producen muchas diferentes medias de la muestra posibles. ¿Cuál es la frase utilizada por este concepto?
   f. ¿La frase que se dio en la parte (e) se aplica sólo a medias de la muestra?

Lección 18: Variabilidad en el muestreo y el efecto del tamaño de la muestra

Trabajo en clase

Ejemplo 1: Variabilidad en el muestreo.

En la lección anterior se investigó la pregunta estadística "¿Cuál es el tiempo típico de estancia en el gimnasio?" Mediante la selección de muestras aleatorias de la población de 800 miembros del gimnasio. Dos diagramas de puntos diferentes de medias de la muestra calculadas a partir de muestras aleatorias de la población se muestran a continuación. El primer diagrama de puntos representa las medias de 20 muestras con muestras que tienen 5 puntos de datos. El segundo diagrama de puntos representa las medias de 20 muestras con muestras que tienen 15 puntos de datos.



Medias de la muestra

Basándose en el primer diagrama de puntos, Jill respondió a la pregunta estadística indicando que el tiempo promedio que pasaron las personas en el gimnasio era entre 34 y 78 minutos. Ella decidió que en un lapso aproximadamente en el medio de ese intervalo estaría su estimado del tiempo promedio que las 800 personas pasaron en el gimnasio. Estimó 52 minutos. Scott respondió a la pregunta utilizando el segundo diagrama de puntos. Indicó que el tiempo promedio que pasaron las personas en el gimnasio estaba entre 41 y 65 minutos. También seleccionó un tiempo de 52 minutos para responder a la pregunta.

a. Describe las diferencias en los dos diagramas de puntos.

b. ¿Qué diagrama de puntos te da más confianza para de responder la pregunta estadística? Explica tu respuesta.

c. En general, ¿quieres que la variabilidad del muestreo sea grande o pequeña? Explica.

Ejercicios 1–3

En la lección anterior, viste una población de 800 lapsos de tiempo en el gimnasio. Ahora seleccionarás una muestra aleatoria de tamaño 15 de esa población. Después, calcularás la media de la muestra.

1. Para empezar, selecciona un número de tres dígitos de la tabla de dígitos aleatorios. Coloca la tabla de dígitos aleatorios delante de ti. Sin mirar la página, coloca el extremo del borrador del lápiz en algún lugar de la tabla de dígitos aleatorios. Comienza a usar la tabla de dígitos aleatorios en el dígito más cercano a tu goma de borrar. Este dígito y los dos siguientes especifican qué observación de la población será la primera observación en la muestra. Escribe el valor de esta observación en el espacio a continuación. (Descarta cualquier número de tres dígitos que sea 800 o más grande y el uso de los siguientes tres dígitos de la tabla de dígitos aleatorios).

2. Continúa moviendo hacia la derecha en la tabla de dígitos aleatorios desde el punto que alcanzaste en el Ejercicio 1. Cada número de tres dígitos especifica un valor que se selecciona de la población. Continúa de esta manera hasta que hayas seleccionado valores 14 más de la población. Esto completará los 15 valores. Escribe los valores de todas las 15 observaciones en el espacio a continuación.

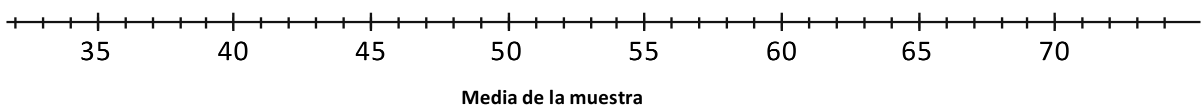
3. Calcula la media de los 15 valores de la muestra. Escribe el valor de tu media de la muestra a continuación. Redondea tu respuesta a la décima más cercana (Asegúrate de mostrar tu trabajo).

Ejercicios 4–6

Ahora utilizarás las medias de la muestra del Ejercicio 3 de toda la clase para hacer un diagrama de puntos.

4. Escribe las medias de la muestra para todos los miembros de la clase en el espacio a continuación.

5. Usa todas las medias de la muestra para hacer un diagrama de puntos utilizando el eje a continuación. (Recuerda, si tiene valores o valores repetidos cerca uno a otro, apila los puntos uno encima del otro.)



6. En la lección anterior, dibujaste un diagrama de puntos de las medias de la muestra para muestras de tamaño 5. ¿Cómo se compara el diagrama de puntos arriba (de las medias de la muestra para muestras de tamaño 15) al diagrama de puntos de las medias de la muestra para muestras de tamaño 5? ¿Para qué tamaño de la muestra (5 o 15) la media muestral tiene la mayor variabilidad en el muestreo?

Este ejercicio ilustra la idea de que cuanto mayor es el tamaño de la muestra, menor es la variabilidad en el muestreo de la media de la muestra.

Ejercicios 7–8

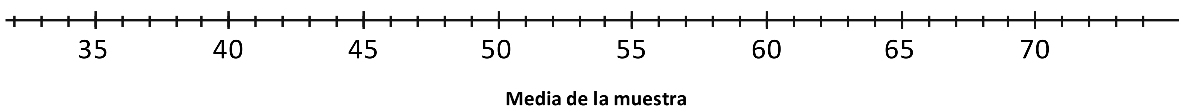
7. Recuerda que en la práctica sólo se toma una muestra. Supón que un estadístico planea tomar una muestra aleatoria de tamaño 15 de la población de tiempo que se pasa en el gimnasio y utilizar la media de la muestra como un estimado de la media poblacional. Basándote en el diagrama de puntos de la media de la muestra que tu clase recogió de la población, ¿aproximadamente qué tan lejos de la media de la población puede esperar el estadístico que esté de la media de la muestra? (La media real de la población es 53.9 minutos.)

8. ¿Cómo se compararía tu respuesta en el Ejercicio 7 con la media equivalente de las distancias para una muestra de tamaño 5?

Ejercicios 9–11

Supón que cada uno en su clase seleccionó una muestra aleatoria de tamaño 25 de la población de los tiempos pasados en el gimnasio.

9. ¿Cómo crees que se vería el diagrama de puntos de medias de la muestra de la clase? Realiza un dibujo utilizando el eje a continuación.



10. Supón que un estadístico planea estimar la media poblacional con una muestra de tamaño 25. De acuerdo con el boceto, ¿aproximadamente qué tan lejos de la media de la población puede esperar el estadístico que esté la media de la muestra?

11. Supón que tienes la opción de utilizar una muestra de tamaño 5, 15 o 25. ¿Cuál de los tres hace que la variabilidad en el muestreo de la media de la muestra sea más pequeña? ¿Por qué se elige el tamaño de la muestra que hace que la variabilidad en el muestreo de la media muestral sea lo más pequeña posible?

Grupo de problemas

1. El propietario de una nueva tienda de café quiere mantener un registro de cuánto gasta cada cliente (en dólares). Cien de estas cantidades se muestran en la siguiente tabla. Estas cantidades serán la *población* para esta pregunta.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	6.18	4.67	4.01	4.06	3.28	4.47	4.86	4.91	3.96	6.18
1	4.98	5.42	5.65	2.97	2.92	7.09	2,78	4.20	5.02	4.98
2	3.12	1.89	4.19	5.12	4.38	5.34	4.22	4.27	5.25	3.12
3	3.90	4.47	4.07	4.80	6.28	5.79	6.07	7.64	6.33	3.90
4	5.55	4.99	3.77	3.63	5.21	3.85	7.43	4.72	6.53	5.55
5	4.55	5.38	5.83	4.10	4.42	5.63	5.57	5.32	5.32	4.55
6	4.56	7.67	6.39	4.05	4.51	5.16	5.29	6.34	3.68	4.56
7	5.86	4.75	4.94	3.92	4.84	4.95	4.50	4.56	7.05	5.86
8	5.00	5.47	5.00	5.70	5.71	6.19	4.41	4.29	4.34	5.00
9	5.12	5.58	6.16	6.39	5.93	3.72	5.92	4.82	6.19	5.12

a. Coloca la tabla de dígitos aleatorios delante de ti. Selecciona un punto de partida sin mirar la página. Entonces, tomando de dos dígitos a la vez, selecciona una muestra aleatoria de tamaño 10 de la población de arriba. Escribe los 10 valores en el espacio siguiente. (Por ejemplo, supongamos que comienzas en el tercer dígito de la fila cuatro de la tabla de dígitos aleatorios. Tomar dos dígitos te da 19. En la población de arriba, vas a la fila con la etiqueta 1 y te mueves a la columna etiquetada 9. Esta observación es 4.98 y será la primera observación en la muestra. Después, continúa en la tabla de dígitos aleatorios desde el punto al que llegaste).

   Calcula la media de la muestra, mostrando tu trabajo. Redondea tu respuesta a la milésima.

b. Utilizando el mismo método que en parte (a), selecciona una muestra aleatoria de tamaño 20 de la población.

   Calcula la media para tu muestra de tamaño 20. Redondea tu respuesta a la milésima.

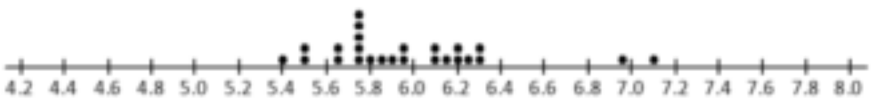
c. ¿Cuál de tus medias de la muestra es probable que sea el mejor estimado de la media poblacional? Explica tu respuesta en términos de variabilidad en el muestreo.

2. Dos diagramas de puntos se muestran a continuación. Uno de los diagramas de puntos muestra los valores de algunas medias de la muestra a partir de muestras aleatorias de tamaño 10 de la población dada en el problema 1. El otro diagrama de puntos muestra los valores de algunas medias de la muestra a partir de muestras aleatorias de tamaño 20 de la población dada en el problema 1.

Diagrama de puntos A

Medias de la muestra

Diagrama de puntos B



Medias de la muestra

¿Qué diagrama de puntos es para las medias de la muestra a partir de muestras de tamaño 10 y qué diagrama de puntos es para las medias de la muestra a partir de muestras de tamaño 20? Explica tu razonamiento.

Las medias muestrales de muestras de tamaño 10 se muestran en el diagrama de puntos ______.

Las medias muestrales de muestras de tamaño 20 se muestran en el diagrama de puntos ______.

3. Vas a usar una muestra aleatoria para estimar el tiempo de viaje promedio para llegar a la escuela para todos los estudiantes en tu grado. Seleccionarás una muestra aleatoria de estudiantes de tu grado. Explica por qué te gustaría que la variabilidad en el muestreo de la media de la muestra sea *pequeña*.

Lección 19: Comprender la variabilidad al estimar una proporción poblacional

Trabajo en clase

En una lección anterior, seleccionaste varias muestras aleatorias de una población. Registraste valores de una variable numérica. Después, calculaste la media para cada muestra, viste que había variabilidad en las medias de la muestra y creaste una distribución de la media de la muestra para ver mejor la variabilidad muestral. Luego, consideraste muestras más grandes y viste que la variabilidad en la distribución disminuye cuando aumenta el tamaño de la muestra. En esta lección, vas a utilizar un proceso similar para investigar la variabilidad en las proporciones de la muestra.

Ejemplo 1: Proporción de la muestra

Tu maestro le dará a tu grupo una bolsa que contiene cubos de colores, algunos de los cuales son de color rojo. Con tus compañeros de clase, vas a construir una distribución de las proporciones de la muestra.

a. Cada persona en tu grupo debe seleccionar al azar una muestra de 10 cubos de la bolsa. Escribe los datos para tu muestra en la siguiente tabla.

Cubo	Resultado (Color)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

b. ¿Cuál es la proporción de los cubos rojos en la muestra de 10?

Este valor se denomina la proporción de la muestra. La proporción de la muestra se obtiene dividiendo el número de éxitos (en este ejemplo, el número de cubos de color rojo) por el número total de observaciones en la muestra.

c. Escribe tu proporción de la muestra en una nota adhesiva y colócala en la recta numérica que tu maestro ha dibujado en la pizarra. Coloca tu nota por encima del valor de la recta numérica que corresponde a tu proporción de la muestra.

   La gráfica de las proporciones de la muestra de todos los estudiantes se llama una distribución muestral de las proporciones de la muestra.

d. Describe la forma de la distribución.

e. Describe la variabilidad en las proporciones de la muestra.

Basándote en la distribución, contesta lo siguiente:

f. ¿Cuál crees que es la proporción poblacional?

g. ¿Cuánta confianza tienes en tu estimado?

Ejemplo 2: Variabilidad en el muestreo

¿Qué crees que le pasaría a la distribución de muestreo si todo el mundo en la clase tomara una muestra aleatoria de 30 cubos de la bolsa? Para ayudar a responder a esta pregunta, repite el muestreo aleatorio que se hizo en la parte (a) del Ejemplo 1, excepto que ahora vas a extraer una muestra aleatoria de 30 cubos en lugar de 10.

a. Toma una muestra aleatoria de 30 cubos de la bolsa. Escribe cuidadosamente el resultado de cada sorteo.

Cubo	Resultado (Color)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

Cubo	Resultado (Color)
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	
25	
26	
27	
28	
29	
30	

b. ¿Cuál es la proporción de cubos rojos en la muestra de 30?

c. Escribe tu proporción de la muestra en una nota adhesiva y coloca la nota en la recta numérica que tu maestro ha dibujado en la pizarra. Coloca tu nota por encima del valor de la recta numérica que corresponde a tu proporción de la muestra.

d. Describe la forma de la distribución.

Ejercicios 1–5

1. Describir la variabilidad en las proporciones de la muestra.

2. Basándote en la distribución, contesta lo siguiente:
   a. ¿Cuál crees que es la proporción poblacional?

   b. ¿Cuánta confianza tienes de tu estimado?

   c. Si estuvieras tomando una muestra aleatoria de 30 cubos y determinaras la proporción que era de color rojo, ¿crees que tu proporción de la muestra estará dentro de 0.05 de la proporción de la población? Explica.

3. Compara la distribución de muestreo basada en muestras de tamaño 10 a la distribución de muestreo basada en muestras de tamaño 30.

4. A medida que el tamaño de la muestra se incrementó de 10 a 30, describe lo que pasó a la variabilidad de la muestra de las proporciones de la muestra.

5. ¿Qué crees que pasaría a la variabilidad de la muestra de las proporciones de la muestra si el tamaño de la muestra para cada muestra fuera de 50 en lugar de 30? Explica.

Resumen de la lección

- La distribución en el muestreo de la proporción de la muestra es una gráfica de las proporciones de la muestra para muchas muestras diferentes.
- La media de las proporciones de la muestra será aproximadamente igual al valor de la proporción de la población.
- A medida que aumenta el tamaño de la muestra, la variabilidad de la muestra disminuye.

Grupo de problemas

1. Una clase de séptimo grado quería encontrar la proporción de M&M's® que son de color rojo. Cada estudiante de séptimo grado tomó una muestra aleatoria de 20 M&M's® de un gran contenedor de M&M's®. La siguiente es la proporción M&Ms® rojos que cada estudiante encontró.

0.15	0	0.1	0.1	0.05	0.1	0.2	0.05	0.1
0.1	0.15	0.2	0	0.1	0.15	0.15	0.1	0.2
0.3	0.1	0.1	0.2	0.1	0.15	0.1	0.05	0.3

   a. Construye un diagrama de puntos de las proporciones de la muestra.
   b. Describe la forma de la distribución.
   c. Describe la variabilidad de la distribución.
   d. Supón que los estudiantes de séptimo grado tomaron muestras aleatorias de tamaño 50. Describe cómo cambiaría la distribución de muestreo de la que se construyó en la parte (a).

2. Un grupo de estudiantes de séptimo grado quería estimar la proporción de estudiantes de secundaria que sufren de alergias. Cada miembro de un grupo de estudiantes de séptimo grado tomó una muestra aleatoria de 10 estudiantes de la escuela secundaria y cada miembro de otro grupo de estudiantes de séptimo grado tomó una muestra aleatoria de 40 estudiantes de la escuela secundaria. A continuación, se presentan dos distribuciones de muestreo de las proporciones de la muestra de estudiantes de secundaria que dijeron que sufren de alergias. ¿Qué diagrama de puntos se basa en muestras aleatorias de tamaño 40? ¿Cómo lo sabes?

Diagrama de puntos A

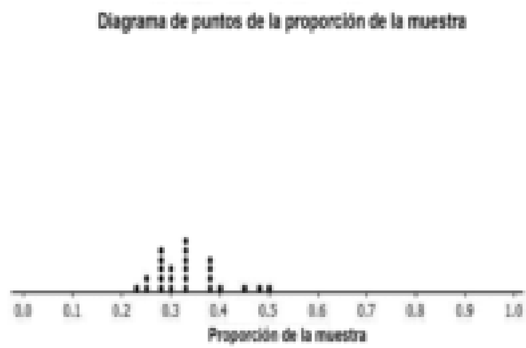
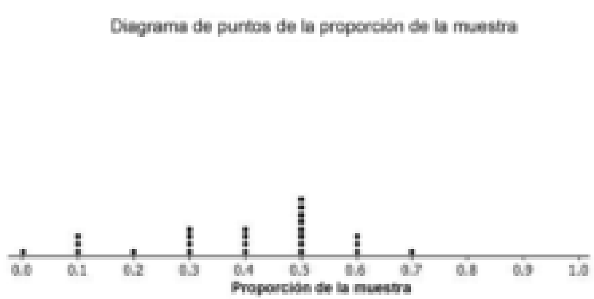


Diagrama de puntos B



3. A la enfermera en tu distrito escolar le gustaría estudiar la proporción de estudiantes de secundaria que suelen dormir por lo menos ocho horas en las noches de escuela. Supón que cada estudiante en tu clase planea tomar una muestra aleatoria de 20 estudiantes de la escuela secundaria de tu distrito y cada uno calcula una proporción de la muestra de estudiantes que dijeron que por lo general duermen al menos ocho horas en las noches de escuela.
   a. ¿Esperas que todos en tu clase obtengan el mismo valor para sus proporciones de la muestra? Explica.
   b. Supón que cada estudiante en la clase aumentó el tamaño de la muestra de 20 a 40. Describe cómo podrías reducir la variabilidad en el muestreo.

Lección 20: Estimar una proporción poblacional

Trabajo en clase

En una lección anterior, cada estudiante en tu clase seleccionó una muestra aleatoria de una población y calculó la proporción de la muestra. Se observó que había variabilidad muestral en las proporciones de la muestra y cuando el tamaño de la muestra aumentó, la variabilidad disminuyó. En esta lección, investigarás cómo las proporciones de la muestra pueden utilizarse para estimar las proporciones de población.

Ejemplo 1: La media de las proporciones de la muestra

Una clase de 30 de séptimo grado quería estimar la proporción de estudiantes de secundaria que eran vegetarianos. Cada estudiante de séptimo grado tomó una muestra aleatoria de 20 estudiantes de la escuela secundaria. Se les preguntó a los estudiantes: "¿Eres vegetariano?" Una muestra de 20 estudiantes tenía tres estudiantes que dijeron que eran vegetarianos. Para esta muestra, la proporción de la muestra es $\frac{3}{20}$, o 0.15. Las siguientes son las proporciones de vegetarianos de los estudiantes de séptimo grado que se encuentran en las 30 muestras. Cada muestra fue de tamaño de 20 estudiantes. Las proporciones se han redondeado a la centésima más cercana.

0.15	0.10	0.15	0.00	0.10	0.15	0.10	0.10	0.05	0.20
0.25	0.15	0.25	0.25	0.30	0.20	0.10	0.20	0.05	0.10
0.10	0.30	0.15	0.05	0.25	0.15	0.20	0.10	0.20	0.15

Ejercicios 1–9

1. El primer estudiante reportó una proporción de la muestra de 0.15. Interpreta este valor en términos del resumen del problema en el ejemplo.

2. Otro estudiante reportó una proporción de la muestra de 0. ¿Este estudiante hizo algo mal cuando hizo la selección de la muestra de estudiantes de la escuela secundaria?

3. Supón que eres parte de esta clase de séptimo grado y tienes una proporción de muestra de 0.20 de una muestra aleatoria de estudiantes de la escuela secundaria. ¿Basándote en esta proporción de la muestra, cuál es tu estimado de la proporción de todos los estudiantes de secundaria que son vegetarianos?

4. Construye un diagrama de puntos de las 30 proporciones de la muestra.

5. Describe la forma de la distribución.

6. Utilizando los 30 resultados de la clase antes mencionados, ¿cuál es tu estimado de la proporción de todos los estudiantes de secundaria que son vegetarianos? Explica cómo llegaste a esta estimado.

7. Calcula la media de las 30 proporciones de la muestra. ¿Qué tan cerca está este valor al estimado que has hecho en el Ejercicio 6?

8. La proporción de todos los estudiantes de secundaria que son vegetarianos es 0.15. Esta es la proporción real de toda la población de estudiantes de secundaria que se utilizó para seleccionar las muestras. Cómo la media de las 30 proporciones de la muestra se compara con la proporción real de la población depende de las muestras de los estudiantes.

9. ¿Las proporciones de la muestra en el diagrama de puntos tienden a agruparse en torno al valor de la proporción de la población? ¿Alguna de las proporciones de la muestra está lejos de 0.15? Enumera las proporciones que se encuentran lejos de 0.15.

Ejemplo 2: El estimado de la proporción poblacional

Doscientos estudiantes de la escuela secundaria Roosevelt respondieron a varias preguntas de encuesta. Una copia impresa de las respuestas de los estudiantes a varias preguntas será proporcionada por el maestro. Los datos están organizados en columnas y se resumen en la siguiente tabla:

Encabezado de columna	**Descripción**
ID	Números de 1 a 200
Viaje a la escuela	Método utilizado para llegar a la escuela: A pie, coche, tren, autobús, bicicleta, monopatín/patineta/patines, bote
Estación favorita	Verano, otoño, invierno, primavera
Alergias	Sí o no
Materia escolar favorita	Arte, inglés, idiomas, ciencias sociales, historia, geografía, música, ciencia, computación, matemáticas, educación física, otra
Música favorita	Clásica, country, heavy metal, jazz, pop, rock punk, rap, reggae, R&B, rock and roll, tecno, evangélica, otra
¿Qué superpoder te gustaría?	Invisibilidad, súper fuerza, telepatía, volar, congelar el tiempo

La última columna del archivo de datos se basa en la pregunta: ¿Cuál de los siguientes superpoderes te gustaría tener más? Las opciones eran invisibilidad, súper fuerza, telepatía, volar o congelar el tiempo.

La clase quiere determinar la proporción de estudiantes de la escuela secundaria Roosevelt que contestaron "congelar el tiempo" a la última pregunta. Vas a utilizar una muestra de la población de la escuela secundaria de Roosevelt para estimar la proporción de los estudiantes que contestaron "congelar el tiempo" a la última pregunta.

Se necesita una muestra aleatoria de respuestas de los 20 estudiantes. Se te proporciona la tabla de números aleatorios que usaste en una lección anterior. También se te proporciona una lista impresa de 200 estudiantes de la escuela Roosevelt. En pequeños grupos, completar el siguiente ejercicio:

a. Selecciona una muestra aleatoria de 20 respuestas de los estudiantes del archivo de datos. Explica cómo seleccionaste la muestra aleatoria.

b. En la tabla a continuación, haz una lista de las 20 respuestas para su muestra.

	Respuesta
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

c. Estima la proporción de la población de estudiantes que respondieron "congelar el tiempo" mediante el cálculo de la proporción de la muestra de 20 estudiantes de la muestra que respondieron "congelar el tiempo" a la pregunta.

d. Combina tu proporción de la muestra con las proporciones de muestras de otros estudiantes y crea un diagrama de puntos de la distribución de las proporciones de la muestra de estudiantes que respondieron "congelar el tiempo" a la pregunta.

e. Al observar el diagrama de puntos, ¿cuál es el valor de la proporción de 200 estudiantes de la escuela Roosevelt que respondieron "congelar el tiempo" a la pregunta?

f. Por lo general, vas a estimar la proporción de estudiantes de la escuela Roosevelt utilizando sólo una sola proporción de la muestra. ¿Cuán diferente era tu proporción de la muestra de tu estimado basada en el diagrama de puntos de muchas muestras?

g. Circula tu proporción de la muestra en el diagrama de puntos. ¿Cómo se compara tu proporción de la muestra con la media de todas las proporciones de la muestra?

h. Calcula la media de todas las proporciones de la muestra. Busca la media de las proporciones de la muestra en el diagrama de puntos; marca esta posición con una X. ¿Cómo se compara la media de las proporciones de la muestra con tu proporción de la muestra?

Grupo de problemas

1. Una clase de 30 estudiantes de séptimo grado quería estimar la proporción de estudiantes de secundaria que tocaban un instrumento musical. Cada estudiante de séptimo grado tomó una muestra aleatoria de 25 estudiantes de secundaria y le preguntó a cada estudiante si él o ella tocaban un instrumento musical. Las siguientes son las proporciones de la muestra de los estudiantes de séptimo grado encontrados en las 30 muestras.

0.80	0.64	0.72	0.60	0.60	0.72	0.76	0.68	0.72	0.68
0.72	0.68	0.68	0.76	0.84	0.60	0.80	0.72	0.76	0.80
0.76	0.60	0.80	0.84	0.68	0.68	0.70	0.68	0.64	0.72

   a. El primer estudiante reportó una proporción muestral de 0.80. ¿Qué significa este valor en términos de este escenario?
   b. Construye un diagrama de puntos de las 30 proporciones de la muestra.
   c. Describe la forma de la distribución.
   d. Describe la variabilidad de la distribución.
   e. Usando las 30 proporciones de la muestra de la clase que aparecen en la página anterior, ¿cuál es tu estimado de la proporción de todos los estudiantes de la escuela secundaria que tocan un instrumento musical?

2. Selecciona otra variable o columna del archivo de datos que sea de interés. Toma una muestra aleatoria de 30 estudiantes de la lista y registra la respuesta a la variable de interés de cada uno de los 30 estudiantes.
   a. Basándote en tu muestra al azar, ¿cuál es tu estimado de la proporción de todos los estudiantes de la escuela secundaria?
   b. Si seleccionaste una muestra aleatoria de 30, ¿conseguirías la misma proporción de la muestra para la segunda muestra aleatoria que obtuviste para la primera muestra aleatoria? Explica por qué sí o por qué no.

Tabla de dígitos aleatorios

Fila																				
1	6	6	7	2	8	0	0	8	4	0	0	4	6	0	3	2	2	4	6	8
2	8	0	3	1	1	1	1	2	7	0	1	9	1	2	7	1	3	3	5	3
3	5	3	5	7	3	6	3	1	7	2	5	5	1	4	7	1	6	5	6	5
4	9	1	1	9	2	8	3	0	3	6	7	7	4	7	5	9	8	1	8	3
5	9	0	2	9	9	7	4	6	3	6	6	3	7	4	2	7	0	0	1	9
6	8	1	4	6	4	6	8	2	8	9	5	5	2	9	6	2	5	3	0	3
7	4	1	1	9	7	0	7	2	9	0	9	7	0	4	6	2	3	1	0	9
8	9	9	2	7	1	3	2	9	0	3	9	0	7	5	6	7	1	7	8	7
9	3	4	2	2	9	1	9	0	7	8	1	6	2	5	3	9	0	9	1	0
10	2	7	3	9	5	9	9	3	2	9	3	9	1	9	0	5	5	1	4	2
11	0	2	5	4	0	8	1	7	0	7	1	3	0	4	3	0	6	4	4	4
12	8	6	0	5	4	8	8	2	7	7	0	1	0	1	7	1	3	5	3	4
13	4	2	6	4	5	2	4	2	6	1	7	5	6	6	4	0	8	4	1	2
14	4	4	9	8	7	3	4	3	8	2	9	1	5	3	5	9	8	9	2	9
15	6	4	8	0	0	0	4	2	3	8	1	8	4	0	9	5	0	9	0	4
16	3	2	3	8	4	8	8	6	2	9	1	0	1	9	9	3	0	7	3	5
17	6	6	7	2	8	0	0	8	4	0	0	4	6	0	3	2	2	4	6	8
18	8	0	3	1	1	1	1	2	7	0	1	9	1	2	7	1	3	3	5	3
19	5	3	5	7	3	6	3	1	7	2	5	5	1	4	7	1	6	5	6	5
20	9	1	1	9	2	8	3	0	3	6	7	7	4	7	5	9	8	1	8	3
21	9	0	2	9	9	7	4	6	3	6	6	3	7	4	2	7	0	0	1	9
22	8	1	4	6	4	6	8	2	8	9	5	5	2	9	6	2	5	3	0	3
23	4	1	1	9	7	0	7	2	9	0	9	7	0	4	6	2	3	1	0	9
24	9	9	2	7	1	3	2	9	0	3	9	0	7	5	6	7	1	7	8	7
25	3	4	2	2	9	1	9	0	7	8	1	6	2	5	3	9	0	9	1	0
26	2	7	3	9	5	9	9	3	2	9	3	9	1	9	0	5	5	1	4	2
27	0	2	5	4	0	8	1	7	0	7	1	3	0	4	3	0	6	4	4	4
28	8	6	0	5	4	8	8	2	7	7	0	1	0	1	7	1	3	5	3	4
29	4	2	6	4	5	2	4	2	6	1	7	5	6	6	4	0	8	4	1	2
30	4	4	9	8	7	3	4	3	8	2	9	1	5	3	5	9	8	9	2	9
31	6	4	8	0	0	0	4	2	3	8	1	8	4	0	9	5	0	9	0	4
32	3	2	3	8	4	8	8	6	2	9	1	0	1	9	9	3	0	7	3	5
33	6	6	7	2	8	0	0	8	4	0	0	4	6	0	3	2	2	4	6	8
34	8	0	3	1	1	1	1	2	7	0	1	9	1	2	7	1	3	3	5	3
35	5	3	5	7	3	6	3	1	7	2	5	5	1	4	7	1	6	5	6	5
36	9	1	1	9	2	8	3	0	3	6	7	7	4	7	5	9	8	1	8	3
37	9	0	2	9	9	7	4	6	3	6	6	3	7	4	2	7	0	0	1	9
38	8	1	4	6	4	6	8	2	8	9	5	5	2	9	6	2	5	3	0	3
39	4	1	1	9	7	0	7	2	9	0	9	7	0	4	6	2	3	1	0	9
40	9	9	2	7	1	3	2	9	0	3	9	0	7	5	6	7	1	7	8	7

ID	Viaje a la escuela	Estación favorita	Alergias	Materia escolar favorita	Música favorita	*Superpoder*
1	Automóvil	Primavera	Sí	Inglés	Pop	Congelar el tiempo
2	Automóvil	Verano	Sí	Música	Pop	Telepatía
3	Automóvil	Verano	No	Ciencia	Pop	Volar
4	Caminata	Otoño	No	Computadoras y la tecnología	Pop	Invisibilidad
5	Automóvil	Verano	No	Arte	Country	Telepatía
6	Automóvil	Verano	No	Educación Física	Rap/Hip-hop	Congelar el tiempo
7	Automóvil	Primavera	No	Educación Física	Pop	Telepatía
8	Automóvil	Invierno	No	Arte	Otros	Volar
9	Automóvil	Verano	No	Educación Física	Pop	Volar
10	Automóvil	Primavera	No	Matemáticas y estadística	Pop	Telepatía
11	Automóvil	Verano	Sí	Historia	Rap/Hip-hop	Invisibilidad
12	Automóvil	Primavera	No	Arte	Rap/Hip-hop	Congelar el tiempo
13	Autobús	Invierno	No	Computadoras y la tecnología	Rap/Hip-hop	Volar
14	Automóvil	Invierno	Sí	Ciencias Sociales	Rap/Hip-hop	Volar
15	Automóvil	Verano	No	Arte	Pop	Congelar el tiempo
16	Automóvil	Otoño	No	Matemáticas y estadística	Pop	Volar
17	Autobús	Invierno	No	Ciencia	Rap/Hip-hop	Congelar el tiempo
18	Automóvil	Primavera	Sí	Arte	Pop	Telepatía
19	Automóvil	Otoño	Sí	Ciencia	Pop	Telepatía
20	Automóvil	Verano	Sí	Educación Física	Rap/Hip-hop	Invisibilidad
21	Automóvil	Primavera	Sí	Ciencia	Pop	Invisibilidad
22	Automóvil	Invierno	Sí	Matemáticas y estadística	Country	Invisibilidad
23	Automóvil	Verano	Sí	Arte	Pop	Invisibilidad
24	Autobús	Invierno	Sí	Otros	Pop	Telepatía
25	Autobús	Verano	Sí	Ciencia	Otros	Volar
26	Automóvil	Verano	No	Ciencia	Pop	Volar
27	Automóvil	Verano	Sí	Música	Pop	Telepatía
28	Automóvil	Verano	No	Educación Física	Country	Súper fuerza
29	Automóvil	Otoño	Sí	Matemáticas y estadística	Country	Telepatía
30	Automóvil	Verano	Sí	Educación Física	Rap/Hip-hop	Telepatía
31	Bote	Invierno	No	Computadoras y la tecnología	Evangélica	Invisibilidad
32	Automóvil	Primavera	No	Educación Física	Pop	Volar
33	Automóvil	Primavera	No	Educación Física	Pop	Volar
34	Automóvil	Verano	No	Matemáticas y estadística	Clásico	Volar
35	Automóvil	Otoño	Sí	Ciencia	Jazz	Telepatía
36	Automóvil	Primavera	No	Ciencia	Rap/Hip-hop	Telepatía
37	Automóvil	Verano	No	Música	Country	Telepatía
38	Autobús	Invierno	No	Matemáticas y estadística	Pop	Volar

39	Automóvil	Primavera	No	Arte	Clásico	Congelar el tiempo
40	Automóvil	Invierno	Sí	Arte	Pop	Volar
41	Caminata	Verano	Sí	Educación Física	Rap/Hip-hop	Volar
42	Autobús	Invierno	Sí	Educación Física	Evangélica	Invisibilidad
43	Autobús	Verano	No	Arte	Otros	Invisibilidad
44	Automóvil	Verano	Sí	Computadoras y la tecnología	Otros	Congelar el tiempo
45	Automóvil	Otoño	Sí	Ciencia	Pop	Volar
46	Automóvil	Verano	Sí	Música	Rap/Hip-hop	Volar
47	Automóvil	Primavera	No	Ciencia	Rap/Hip-hop	Invisibilidad
48	Autobús	Primavera	No	Música	Pop	Telepatía
49	Automóvil	Verano	Sí	Ciencias Sociales	Tecno/ Electrónica	Telepatía
50	Automóvil	Verano	Sí	Educación Física	Pop	Telepatía
51	Automóvil	Primavera	Sí	Otros	Otros	Telepatía
52	Automóvil	Verano	No	Arte	Pop	Volar
53	Automóvil	Verano	Sí	Otros	Pop	Telepatía
54	Automóvil	Verano	Sí	Educación Física	Rap/Hip-hop	Invisibilidad
55	Autobús	Verano	Sí	Educación Física	Otros	Súper fuerza
56	Automóvil	Verano	No	Ciencia	Rap/Hip-hop	Invisibilidad
57	Automóvil	Invierno	No	Idiomas	Rap/Hip-hop	Súper fuerza
58	Automóvil	Otoño	Sí	Inglés	Pop	Volar
59	Automóvil	Invierno	No	Ciencia	Pop	Telepatía
60	Automóvil	Verano	No	Arte	Pop	Invisibilidad
61	Automóvil	Verano	Sí	Otros	Pop	Congelar el tiempo
62	Autobús	Primavera	No	Ciencia	Pop	Volar
63	Automóvil	Invierno	Sí	Matemáticas y estadística	Otros	Congelar el tiempo
64	Automóvil	Verano	No	Ciencias Sociales	Clásico	Volar
65	Automóvil	Invierno	Sí	Ciencia	Pop	Telepatía
66	Automóvil	Invierno	No	Ciencia	Rock and roll	Volar
67	Automóvil	Verano	No	Matemáticas y estadística	Rap/Hip-hop	Súper fuerza
68	Automóvil	Otoño	No	Música	Rock and roll	Súper fuerza
69	Automóvil	Primavera	No	Otros	Otros	Invisibilidad
70	Automóvil	Verano	Sí	Matemáticas y estadística	Rap/Hip-hop	Telepatía
71	Automóvil	Invierno	No	Arte	Otros	Volar
72	Automóvil	Primavera	Sí	Matemáticas y estadística	Pop	Telepatía
73	Automóvil	Invierno	Sí	Computadoras y la tecnología	Tecno/ Electrónica	Telepatía
74	Caminata	Invierno	No	Educación Física	Tecno/ Electrónica	Volar
75	Caminata	Verano	No	Historia	Rock and roll	Volar
76	Patineta/	Invierno	Sí	Computadoras y la tecnología	Tecno/	Congelar el

	Scooter/ Rollerblade				Electrónica	tiempo
77	Automóvil	Primavera	Sí	Ciencia	Otros	Telepatía
78	Automóvil	Verano	No	Música	Rap/Hip-hop	Invisibilidad
79	Automóvil	Verano	No	Ciencias Sociales	Pop	Invisibilidad
80	Automóvil	Verano	No	Otros	Rap/Hip-hop	Telepatía
81	Caminata	Primavera	Sí	Historia	Rap/Hip-hop	Invisibilidad
82	Automóvil	Verano	No	Arte	Pop	Invisibilidad
83	Caminata	Primavera	No	Idiomas	Jazz	Súper fuerza
84	Automóvil	Otoño	No	Historia	Jazz	Invisibilidad
85	Automóvil	Verano	No	Educación Física	Rap/Hip-hop	Congelar el tiempo
86	Automóvil	Primavera	No	Matemáticas y estadística	Pop	Congelar el tiempo
87	Autobús	Primavera	Sí	Arte	Pop	Telepatía
88	Automóvil	Invierno	No	Matemáticas y estadística	Otros	Invisibilidad
89	Automóvil	Verano	Sí	Educación Física	Country	Telepatía
90	Autobús	Verano	No	Computadoras y la tecnología	Otros	Volar
91	Automóvil	Invierno	No	Historia	Pop	Telepatía
92	Caminata	Invierno	No	Ciencia	Clásico	Telepatía
93	Bicicleta	Verano	No	Educación Física	Pop	Invisibilidad
94	Automóvil	Verano	No	Inglés	Pop	Telepatía
95	Automóvil	Verano	Sí	Educación Física	Pop	Volar
96	Automóvil	Invierno	No	Ciencia	Otros	Congelar el tiempo
97	Automóvil	Invierno	No	Otros	Rap/Hip-hop	Súper fuerza
98	Automóvil	Verano	Sí	Educación Física	Rap/Hip-hop	Congelar el tiempo
99	Automóvil	Primavera	No	Música	Clásico	Telepatía
100	Automóvil	Primavera	Sí	Ciencia	Evangélica	Telepatía
101	Automóvil	Verano	Sí	Historia	Pop	Súper fuerza
102	Automóvil	Invierno	Sí	Inglés	Country	Congelar el tiempo
103	Automóvil	Primavera	No	Computadoras y la tecnología	Otros	Telepatía
104	Automóvil	Invierno	No	Historia	Otros	Invisibilidad
105	Automóvil	Otoño	No	Música	Pop	Telepatía
106	Automóvil	Otoño	No	Ciencia	Pop	Telepatía
107	Automóvil	Invierno	No	Arte	Metal pesado	Volar
108	Automóvil	Primavera	Sí	Ciencia	Rock and roll	Volar
109	Automóvil	Otoño	Sí	Música	Otros	Volar
110	Automóvil	Verano	Sí	Ciencias Sociales	Tecno/ Electrónica	Telepatía
111	Automóvil	Primavera	No	Educación Física	Pop	Volar
112	Automóvil	Verano	No	Educación Física	Pop	Volar
113	Automóvil	Verano	Sí	Ciencias Sociales	Pop	Congelar el

						tiempo
114	Automóvil	Verano	Sí	Computadoras y la tecnología	Evangélica	Congelar el tiempo
115	Automóvil	Invierno	Sí	Otros	Rap/Hip-hop	Telepatía
116	Automóvil	Verano	Sí	Ciencia	Country	Telepatía
117	Automóvil	Otoño		Música	Country	Volar
118	Caminata	Verano	No	Historia	Pop	Telepatía
119	Automóvil	Primavera	Sí	Arte	Pop	Congelar el tiempo
120	Automóvil	Otoño	Sí	Educación Física	Rap/Hip-hop	Volar
121	Automóvil	Primavera	No	Música	Rock and roll	Telepatía
122	Automóvil	Otoño	No	Arte	Pop	Invisibilidad
123	Automóvil	Verano	Sí	Educación Física	Rap/Hip-hop	Volar
124	Caminata	Verano	No	Computadoras y la tecnología	Pop	Telepatía
125	Automóvil	Otoño	No	Arte	Pop	Volar
126	Bicicleta	Primavera	No	Ciencia	Pop	Invisibilidad
127	Automóvil	Verano	No	Ciencias Sociales	Evangélica	Volar
128	Bicicleta	Invierno	No	Ciencias Sociales	Rap/Hip-hop	Volar
129	Automóvil	Verano	Sí	Matemáticas y estadística	Pop	Invisibilidad
130	Automóvil	Otoño	Sí	Matemáticas y estadística	Country	Telepatía
131	Automóvil	Invierno	Sí	Música	Evangélica	Súper fuerza
132	Riel (tren/tranvía /metro)	Otoño	Sí	Arte	Otros	Volar
133	Caminata	Verano	No	Ciencias Sociales	Pop	Invisibilidad
134	Automóvil	Verano	Sí	Música	Pop	Congelar el tiempo
135	Automóvil	Invierno	No	Matemáticas y estadística	Pop	Telepatía
136	Automóvil	Otoño	Sí	Música	Pop	Telepatía
137	Automóvil	Verano	Sí	Computadoras y la tecnología	Otros	Congelar el tiempo
138	Automóvil	Verano	Sí	Educación Física	Pop	Telepatía
139	Automóvil	Verano	Sí	Ciencias Sociales	Otros	Telepatía
140	Automóvil	Primavera	Sí	Educación Física	Otros	Congelar el tiempo
141	Automóvil	Otoño	Sí	Ciencia	Country	Telepatía
142	Automóvil	Primavera	Sí	Ciencia	Pop	Invisibilidad
143	Automóvil	Verano	No	Otros	Rap/Hip-hop	Congelar el tiempo
144	Automóvil	Verano	No	Otros	Otros	Volar
145	Automóvil	Verano	No	Idiomas	Pop	Congelar el tiempo
146	Automóvil	Verano	Sí	Educación Física	Pop	Telepatía
147	Autobús	Invierno	No	Historia	Country	Invisibilidad
148	Automóvil	Primavera	No	Computadoras y la tecnología	Otros	Telepatía

149	Autobús	Invierno	Sí	Ciencia	Pop	Invisibilidad
150	Automóvil	Verano	No	Ciencias Sociales	Rap/Hip-hop	Invisibilidad
151	Automóvil	Verano	No	Educación Física	Pop	Invisibilidad
152	Automóvil	Verano	Sí	Educación Física	Pop	Súper fuerza
153	Automóvil	Verano	No	Matemáticas y estadística	Pop	Volar
154	Automóvil	Verano	No	Arte	Rap/Hip-hop	Congelar el tiempo
155	Automóvil	Invierno	Sí	Otros	Clásico	Congelar el tiempo
156	Automóvil	Verano	Sí	Computadoras y la tecnología	Otros	Telepatía
157	Automóvil	Primavera	No	Otros	Pop	Congelar el tiempo
158	Automóvil	Invierno	Sí	Música	Country	Volar
159	Automóvil	Invierno	No	Historia	Jazz	Invisibilidad
160	Automóvil	Primavera	Sí	Historia	Pop	Volar
161	Automóvil	Invierno	Sí	Matemáticas y estadística	Otros	Telepatía
162	Automóvil	Otoño	No	Ciencia	Country	Invisibilidad
163	Automóvil	Invierno	No	Ciencia	Otros	Volar
164	Automóvil	Verano	No	Ciencia	Pop	Volar
165	Patineta/ Scooter/ Rollerblade	Primavera	Sí	Ciencias Sociales	Otros	Congelar el tiempo
166	Automóvil	Invierno	Sí	Arte	Rap/Hip-hop	Volar
167	Automóvil	Verano	Sí	Otros	Pop	Congelar el tiempo
168	Automóvil	Verano	No	Inglés	Pop	Telepatía
169	Automóvil	Verano	No	Otros	Pop	Invisibilidad
170	Automóvil	Verano	Sí	Educación Física	Tecno/ Electrónica	Congelar el tiempo
171	Automóvil	Verano	No	Arte	Pop	Telepatía
172	Automóvil	Verano	No	Educación Física	Rap/Hip-hop	Congelar el tiempo
173	Automóvil	Invierno	Sí	Matemáticas y estadística	Otros	Invisibilidad
174	Autobús	Verano	Sí	Música	Pop	Congelar el tiempo
175	Automóvil	Invierno	No	Arte	Pop	Volar
176	Automóvil	Otoño	No	Ciencia	Rap/Hip-hop	Volar
177	Automóvil	Invierno	Sí	Ciencias Sociales	Pop	Telepatía
178	Automóvil	Otoño	No	Arte	Otros	Volar
179	Autobús	Primavera	No	Educación Física	Country	Volar
180	Automóvil	Invierno	No	Música	Otros	Telepatía
181	Autobús	Verano	No	Computadoras y la tecnología	Rap/Hip-hop	Congelar el tiempo
182	Automóvil	Verano	Sí	Educación Física	Rap/Hip-hop	Invisibilidad
183	Automóvil	Verano	Sí	Música	Otros	Telepatía

184	Automóvil	Primavera	No	Ciencia	Rap/Hip-hop	Invisibilidad
185	Riel (tren/ tranvía/metro)	Verano	No	Educación Física	Otros	Congelar el tiempo
186	Automóvil	Verano	Sí	Matemáticas y estadística	Rap/Hip-hop	Volar
187	Autobús	Invierno	Sí	Matemáticas y estadística	Otros	Súper fuerza
188	Automóvil	Verano	No	Matemáticas y estadística	Otros	Congelar el tiempo
189	Riel (tren/ tranvía/ metro)	Otoño	Sí	Música	Jazz	Volar
190	Automóvil	Verano	Sí	Ciencia	Pop	Súper fuerza
191	Automóvil	Verano	Sí	Ciencia	Tecno/ Electrónica	Congelar el tiempo
192	Automóvil	Primavera	Sí	Educación Física	Rap/Hip-hop	Congelar el tiempo
193	Automóvil	Verano	Sí	Educación Física	Rap/Hip-hop	Congelar el tiempo
194	Automóvil	Invierno	No	Educación Física	Rap/Hip-hop	Telepatía
195	Automóvil	Invierno	No	Música	Jazz	Congelar el tiempo
196	Caminata	Verano	Sí	Historia	Country	Congelar el tiempo
197	Automóvil	Primavera	No	Historia	Rap/Hip-hop	Congelar el tiempo
198	Automóvil	Otoño	Sí	Otros	Pop	Congelar el tiempo
199	Automóvil	Primavera	Sí	Ciencia	Otros	Congelar el tiempo
200	Bicicleta	Invierno	Sí	Otros	Rap/Hip-hop	Congelar el tiempo

Lección 21: ¿Por qué preocuparse por la variabilidad de la muestra?

Trabajo en clase

Hay tres bolsas, Bolsa A, Bolsa B y Bolsa C, con 100 números en cada bolsa. Tú y tus compañeros de clase van a investigar la media de la población (la media de todos los 100 números) en cada bolsa. Cada conjunto de números tiene el mismo rango. Sin embargo, las medias poblacionales de cada conjunto pueden o no ser la misma. ¡Vamos a ver quién puede descubrir el misterio de las bolsas!

Ejercicios

1. Para comenzar la investigación, empieza por seleccionar una muestra aleatoria de diez números de la Bolsa A. Recuerda primero mezclar los números de la bolsa. Después, selecciona un número de la bolsa. No lo pongas de nuevo en la bolsa. Escribe el número en la gráfica a continuación. Continúa seleccionando un número a la vez hasta que hayas seleccionado diez números. Mezcla los números de la bolsa entre cada selección.

Selección	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Bolsa A										

   a. Crea un diagrama de puntos de la muestra de diez números. Utiliza un punto para representar cada número en la muestra.

   b. ¿Crees que la media de todos los números de la bolsa A podría ser 10? ¿Por qué sí o por qué no?

   c. Basándote en el diagrama de puntos, ¿cuál sería tu estimado sobre la media de los números en la Bolsa A? ¿Cómo harías el estimado?

   d. ¿Crees que tu media de la muestra estará cerca de la media poblacional? ¿Por qué sí o por qué no?

e. ¿Es tu media de la muestra la misma que la media de la muestra de tus compañeros? ¿Por qué sí o por qué no?

2. Repite el proceso mediante la selección de una muestra aleatoria de diez números de la Bolsa B.

Selección	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Bolsa B										

a. Crea un diagrama de puntos de tu muestra de diez números. Utiliza un punto para representar cada uno de los números en la muestra.

b. Basándote en tu diagrama de puntos, ¿crees que la media de los números de la Bolsa B es igual o diferente de la media de los números en la Bolsa A? Explica tu razonamiento.

3. Repite el proceso una vez más mediante la selección de una muestra aleatoria de diez números de la Bolsa C.

Selección	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Bolsa C										

a. Crea un diagrama de puntos de la muestra de diez números. Utiliza un punto para representar cada uno de los números en la muestra.

b. Basándote en tu diagrama de puntos, ¿crees que la media de los números en la Bolsa C es igual o diferente a la media de los números en la Bolsa A? Explica tu razonamiento.

4. ¿Tus diagramas de puntos de las tres bolsas son iguales a los diagramas de puntos de otros estudiantes en tu clase? ¿Por qué sí o por qué no?

5. Calcula la media de los números para cada una de las muestras de la Bolsa A, Bolsa B y Bolsa C.

	Media muestral de los números
Bolsa A	
Bolsa B	
Bolsa C	

a. ¿Las medias de la muestra que calculaste son igual a las medias de la muestra de otros miembros de tu clase? ¿Por qué sí o por qué no?

b. ¿Cómo se comparan las medias muestrales de la Bolsa A y la Bolsa B?

c. Calcula la diferencia de la media de la muestra para la Bolsa A menos la media de la muestra para la Bolsa B (Media A - Media B). Basándote en esta diferencia, ¿puedes estar seguro qué bolsa tiene la media de la población más grande? ¿Por qué sí o por qué no?

6. Basándote en los diagramas de puntos de las medias de la muestra de la clase, ¿crees que la media de los números de la Bolsa A y la media de los números de la Bolsa B son diferentes? ¿Crees que la media de los números en la Bolsa A y la media de los números en la Bolsa C sean diferentes? Justifica tus respuestas.

7. Basándote en la diferencia entre la media de la muestra de la Bolsa A y la media de la muestra de la Bolsa B (Media A - Media B) que calculaste en el Ejercicio 5, ¿crees que las dos poblaciones (Bolsas A y B) tengan diferentes medias, o crees que las dos medias de población puedan ser iguales?

8. Basándote en esta diferencia, ¿puedes estar seguro de qué bolsa será la población más grande? ¿Por qué sí o por qué no?

9. ¿La diferencia en la media de la muestra es igual a las diferencias de tus compañeros? ¿Por qué sí o por qué no?

10. Traza tu diferencia de las medias (Media A - Media B) en un diagrama de puntos de la clase. Describe la distribución de las diferencias que se representan en la gráfica. Recuerda hablar del centro y dispersión.

11. ¿Por qué no son siempre 0 las diferencias en las medias de la muestra de Bolsa A y Bolsa B?

12. ¿El diagrama de puntos de la clase contiene diferencias que están relativamente lejos de $\mathbf{0}$? Si es así, ¿por qué crees que sea esto?

13. Supón que se va a tomar una muestra de una nueva bolsa. ¿Qué tan grande tendría que ser la diferencia en la media muestral para la Bolsa A y la media muestral para la nueva bolsa (Media A - Media nueva) antes de que convencerte de que la media de la población de la nueva bolsa es diferente de la media poblacional de la Bolsa A? Utiliza el diagrama de puntos de la clase de las diferencias en las medias de la muestra de Bolsas A y B (que tienen las medias poblacionales iguales) para ayudarte a responder esta pregunta.

Las diferencias en el diagrama de puntos de la clase se producen debido a la variabilidad en el muestreo—la variabilidad aleatoria de una muestra a otra. En el Ejercicio 13, se te preguntó acerca de cuán grande tendría que ser la diferencia en medias de la muestra antes de tener evidencia convincente de que una media poblacional es más grande que la otra media poblacional. Una diferencia *significativa* entre dos medias muestrales es una que es improbable que haya ocurrido por casualidad si las medias de población son iguales. En otras palabras, la diferencia es una que es mayor de lo que se habría esperado simplemente debido a la variabilidad en el muestreo.

14. Calcula la media de la muestra de la Bolsa A menos la media de la muestra de la Bolsa C (Media A – Media C).

15. Traza tu diferencia (Media A – Media C) en un diagrama de puntos de la clase.

16. ¿Cómo se comparan los centros de los diagramas de puntos de la clase para Media A – Media B y Media A – Media C?

17. Cada bolsa tiene una media de la población que es 10.5 o 14.5. Expresa lo que piensas que es la media de la población para cada bolsa. Explica tu elección para cada bolsa.

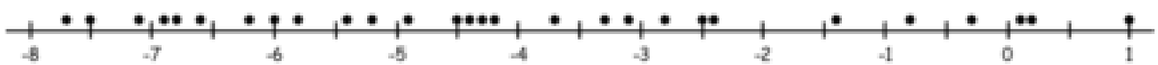
Resumen de la lección

- Recuerda pensar en la variabilidad en el muestreo—la variabilidad aleatoria de muestra a muestra.
- Ten cuidado de tomar decisiones basadas simplemente en el hecho de que dos medias de la muestra no son iguales.
- Ten en cuenta la distribución de la diferencia en la media de la muestra al tomar una decisión.

Grupo de problemas

A continuación, se presentan tres diagramas de puntos. Cada diagrama de puntos representa las diferencias en las medias de la muestra para muestras aleatorias seleccionadas a partir de dos poblaciones (Bolsa A y Bolsa B). Para cada distribución, se encontraron las diferencias restando las medias de la muestra de Bolsa B de las medias de la muestra de Bolsa A (muestra de la Media A — muestra de la Media B).

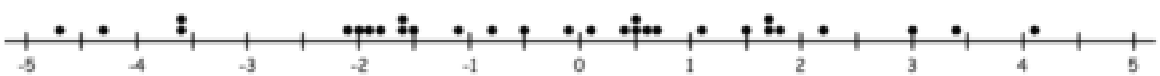
1. ¿La siguiente gráfica indica que la media de la población de la Bolsa A es mayor que la media de la población de la Bolsa B? ¿Por qué sí o por qué no?



Promedio de la muestra A- Promedio de la muestra B

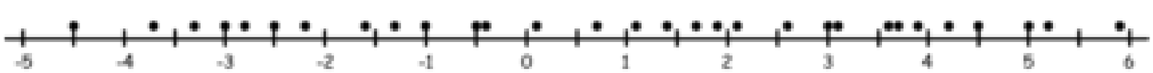
2. Utiliza la gráfica anterior para estimar la diferencia en las medias de población (Media A — Media B).

3. ¿La siguiente gráfica indica que la media de la población de la Bolsa A es mayor que la media de la población de la Bolsa B? ¿Por qué sí o por qué no?



Promedio de la muestra A- Promedio de la muestra B

4. ¿La siguiente gráfica indica que la media de la población de la Bolsa A es mayor que la media de la población de la Bolsa B? ¿Por qué sí o por qué no?



Promedio de la muestra A- Promedio de la muestra B

5. En la gráfica anterior, ¿cuántas diferencias son mayores que 0? ¿Cuántas diferencias son menores que 0? ¿Qué te dice esto?

6. En el Problema 4, la media poblacional para la Bolsa A es realmente más grande que la media de la población para el Bolsa B. ¿Por qué es posible todavía obtener tantas diferencias negativas en la gráfica?

Lección 22: Usar datos de la muestra para comparar las medias de dos o más poblaciones

Trabajo en clase

En las lecciones anteriores, trabajaste con una población. Muchas preguntas estadísticas implican la comparación de dos poblaciones. Por ejemplo:

- En promedio, ¿los niños y niñas difieren en el razonamiento cuantitativo?
- ¿Los estudiantes aprenden habilidades aritméticas básicas mejor con o sin calculadoras?
- ¿Cuál de dos medicamentos es más eficaz en el tratamiento de dolores de cabeza y de migraña?
- ¿Algún tipo de coche obtiene mejor kilometraje por galón de gasolina que otro tipo?
- ¿Algún tipo de tela se degrada en vertederos más rápido que otro tipo?
- ¿Las personas con diabetes se curan más lentamente que las personas que no tienen diabetes?

En esta lección, comenzarás a explorar cuán grande debe ser la diferencia en medias de la muestra para que la diferencia sea considerada significativa. La siguiente lección extenderá dicho conocimiento para hacer inferencias informales acerca de las diferencias de población.

Ejemplos 1–3

El proyecto de matemáticas de Tamika es ver si los niños o niñas son más rápidos en la solución de un rompecabezas de tipo KenKen. Ella crea un rompecabezas y registra los siguientes tiempos que se tardaron en resolver el rompecabezas (en segundos) para una muestra aleatoria de 10 niños de su escuela y una muestra aleatoria de 11 niñas de su escuela:

												Media	**MAD**
Niños	39	38	27	36	40	27	43	36	34	33			35.3	4.04
Niñas	41	41	33	42	47	38	41	36	36	32	46		39.4	3.96

1. En la misma escala, dibuja diagramas de puntos de datos de las niñas y datos de los niños. Comenta sobre la cantidad de superposición entre los dos diagramas de puntos. ¿En qué se parecen y en qué se diferencian los diagramas de puntos?

2. Compara la variabilidad en los dos conjuntos de datos utilizando la MAD (desviación absoluta de la media). ¿Es la variabilidad en cada muestra la misma? Interpreta la MAD en el contexto del problema.

3. En la lección anterior, se aprendió que la diferencia entre dos medias de la muestra se considera significativa si la diferencia es más de lo que cabría esperar ver en base sólo a la variabilidad en el muestreo. La diferencia en la media de la muestra de tiempo de los niños y las niñas es 4.1 segundos (39.4 segundos $-$ 35.3 segundos). Esta diferencia es de aproximadamente 1 MAD.

   a. Si 4 seg. se utiliza para aproximar el valor de 1 MAD para los niños y las niñas, ¿cuál es el intervalo de veces que están dentro de 1 MAD de la media de la muestra para los niños?

   b. De las 10 medias de la muestra de los niños, ¿cuántos de ellos se encuentran dentro de ese intervalo?

   c. De las 11 medias de la muestra de las niñas, ¿cuántas de ellas están dentro del intervalo calculado en parte (a)?

   d. Basándote en los diagramas de puntos, ¿crees que la diferencia entre las dos medias de la muestra es una diferencia significativa? Es decir, ¿estás convencido de que el tiempo promedio para todas las niñas en la escuela (no sólo esta muestra de las niñas) es diferente del tiempo promedio para todos los niños en la escuela? Explica tu elección basándote en los diagramas de puntos.

Ejemplos 4–7

¿Qué tan bueno serías en el estimado de un minuto? Trabaja en pareja. Lanza una moneda para determinar qué persona en la pareja irá primero. Uno de ustedes pone la cara hacia abajo y levanta la mano. Cuando el compañero diga "Empieza", mantén la cara hacia abajo y la mano arriba. Cuando pienses que un minuto ha pasado, baja la mano. Tu compañero registra cuánto tiempo ha pasado. Ten en cuenta que la habitación tiene que estar en silencio. Cambien los papeles, excepto que esta vez hablas con tu compañero durante el período en que la persona con la cara hacia abajo indica cuándo cree que un minuto ha pasado. Ten en cuenta que la habitación no estará en silencio.

Grupo	**Las estimaciones para un minuto**													
Callado														
Hablar														

Utiliza datos de la clase para completar la siguiente.

4. Calcula el tiempo promedio minuto para cada grupo. Después, encuentra la diferencia entre la media *callado* y la media *hablar*.

5. En la misma escala, dibuja diagramas de puntos de las dos distribuciones de datos y discute las semejanzas y diferencias en las dos distribuciones.

6. Calcula la desviación absoluta de la media (MAD) para cada conjunto de datos. Basándote en las MAD, compara la variabilidad en cada muestra. ¿Es la variabilidad la misma? Interpreta los MAD en el contexto del problema.

7. Basándote en los cálculos, ¿Es la diferencia en el tiempo promedio estimado significativa? Parte del razonamiento debería implicar el número de MAD que separan las dos medias de la muestra. Ten en cuenta que si las MAD difieren, utiliza la más grande para determinar cuántas MAD separan las dos medias.

Resumen de la lección

La variabilidad es una ocurrencia natural en distribuciones de datos. Dos distribuciones de datos se pueden comparar al describir cuán lejos sus medias muestrales están. La cantidad de separación se puede medir en términos de cuántas MAD separan a las medias. (Considera que si las dos MAD muestrales difieren, debes usar la mayor de las dos para hacer este cálculo).

Grupo de problemas

1. Una escuela está tratando de decidir qué programa de lectura comprar.
   a. ¿Cuántas MAD separan la media de calificación de lectura de comprensión para un programa estándar (media $= 67.8$, MAD $= 4.6$, $n = 24$) y un programa basado en actividades (media $= 70.3$, MAD $= 4.5$, $n = 27$)?
   b. ¿Qué recomendación harías basándote en este resultado?

2. ¿Un balón de fútbol americano lleno de helio va más lejos que uno lleno de aire? Se utilizaron dos balones de fútbol americano idénticos: uno lleno de helio y uno lleno de aire a la misma presión. Se escogió a Matt del equipo para hacer las patadas. Matt no sabía qué balón estaba pateando. Los datos (en yardas) siguen.

Aire	25	23	28	29	27	32	24	26	22	27	31	24	33	26	24	28	30
Helio	24	19	25	25	22	24	28	31	22	26	24	23	22	21	21	23	25

	Media	**MAD**
Aire		
Helio		

   a. Calcula la diferencia entre la media de la muestra de la distancia del balón de fútbol lleno de aire y para el otro lleno de helio.
   b. En la misma escala, dibuja diagramas de puntos de las dos distribuciones y analiza la variabilidad en cada distribución.
   c. Calcula la MAD para cada distribución. Basándote en las MAD, compara la variabilidad en cada distribución. ¿Es la variabilidad la misma? Interpreta las MAD en el contexto del problema.
   d. Basándote en tus cálculos, ¿Es la diferencia en la distancia media significativa? Parte de tu razonamiento debería implicar el número de MAD que separa las medias de la muestra. Ten en cuenta que si las MAD difieren, utiliza la más grande para determinar la cantidad de MAD que separan las dos medias.

3. Supón que tus compañeros de clase estaban debatiendo sobre si ir a la universidad realmente vale la pena. Basándote en los siguientes datos de salarios anuales (redondeados a los miles de dólares más cercanos) para graduados universitarios y graduados de secundaria sin experiencia en la universidad, ¿parece que ir a la universidad realmente vale la pena el esfuerzo? Los datos son de las personas en su segundo año de empleo.

Graduado de la universidad	41	67	53	48	45	60	59	55	52	52	50	59	44	49	52
Graduado de secundaria	23	33	36	29	25	43	42	38	27	25	33	41	29	33	35

a. Calcula la diferencia entre la media muestral de salario para los graduados universitarios y para los graduados de la escuela secundaria.

b. En la misma escala, dibuja diagramas de puntos de las dos distribuciones y analiza la variabilidad en cada distribución.

c. Calcula la MAD para cada distribución. Basándote en las MAD, compara la variabilidad en cada distribución. ¿Es la variabilidad la misma? Interpreta las MAD en el contexto del problema.

d. Basándote en tus cálculos, ¿vale la pena ir a la universidad? Parte de tu razonamiento debería implicar el número de MAD que separan las medias de la muestra.

Lección 23: Usar datos de la muestra para comparar las medias de dos o más poblaciones

Trabajo en clase

En la lección anterior, describiste a qué distancia se encuentran las medias de dos grupos de datos en términos de la MAD (desviación media absoluta), una medida de variabilidad. En esta lección, extenderás la idea de determinar de manera informal cuándo dos medias de la muestra calculadas a partir de muestras aleatorias están lo suficientemente separadas la una de la otra para implicar que la media de la población también difiere de manera *significativa*. Recordemos que una diferencia *significativa* entre las dos medias es una diferencia que es mayor de lo que cabría esperar simplemente debido a la variabilidad en el muestreo.

Ejemplo 1: Mensajes de texto

Con los mensajes de texto siendo tan populares, Linda quería determinar si los estudiantes de la escuela secundaria memorizan palabras reales más o menos fácilmente que las palabras falsas. Por ejemplo, las palabras reales son alimentos, coche, estudiar, nadar; mientras que las palabras falsas son STK, fonw, cqur, ttnsp. Seleccionó al azar a 28 estudiantes de todos los estudiantes de la escuela secundaria en su distrito y dio a la mitad de ellos una lista de 20 palabras reales y a la otra mitad una lista de 20 palabras falsas.

a. ¿Cómo crees que Linda pudo haber seleccionado al azar a 28 estudiantes de todos los estudiantes de la escuela secundaria en su distrito?

b. ¿Por qué crees que Linda seleccionó a los estudiantes para su estudio al azar? Explica.

c. Ella dio a los estudiantes seleccionados un minuto para memorizar sus listas, tras lo cual tenían que devolver las listas y, al cabo de dos minutos, anotar todas las palabras que pudieran recordar. Después, se calculó el número de palabras correctas que fueron capaces de anotar. ¿Crees que un castigo deba aplicarse para una palabra incorrectamente escrita? Explica tu razonamiento.

Ejercicios 1–4

Supón que los datos (el número de palabras recordadas correctas) que recogió fueron los siguientes:

Para los estudiantes con la lista de palabras verdaderas: $8, 11, 12, 8, 4, 7, 9, 12, 12, 9, 14, 11, 5, 10$

Para los estudiantes con la lista de palabras falsas: $3, 5, 4, 4, 4, 7, 11, 9, 7, 7, 1, 3, 3, 7$

1. En la misma escala, dibuja diagramas de puntos para los dos conjuntos de datos.

2. De tu análisis de los diagramas de puntos, escribe un par de frases que comparen la distribución de la cantidad de palabras reales correctamente recordadas con la distribución del número de palabras falsas recordadas correctamente. En particular, comenta qué tipo de palabras los estudiantes recuerdan mejor. Explica.

3. Linda hizo los siguientes cálculos para los dos conjuntos de datos:

	Media	**MAD**
Palabras reales recordadas	9.43	2.29
Palabras falsas recordadas	5.36	2.27

En la lección anterior, calculaste el número de MAD que separaba dos medias de la muestra. Usaste la MAD más grande para hacer este cálculo, si las dos MAD no eran iguales. ¿Cuántas MAD separan el número promedio de palabras reales recordadas y el número promedio de palabras falsas recordadas por los estudiantes en el estudio?

4. En la última lección, nuestro trabajo sugirió que si el número de MAD que separan las dos medias de la muestra es 2 o más, entonces es razonable concluir que no sólo las medias difieren en las muestras, pero que las medias difieren en las poblaciones también. Si el número de MAD es menor que 2, entonces, se puede concluir que la diferencia de las medias de la muestra podría sólo ser la variabilidad en el muestreo y que puede no haber una diferencia significativa en la población. Utilizando estos criterios, ¿qué puede concluir Linda acerca de la diferencia de medias poblacionales basándose en los datos de la muestra que recogió? Asegúrate de expresar tu conclusión en el contexto de este problema.

Ejemplo 2

Ken, un estudiante de octavo grado, estaba interesado en hacer un estudio estadístico que involucra estudiantes de sexto grado y de onceavo grado en su distrito escolar. Realizó una encuesta sobre cuatro variables numéricas y dos variables categóricas (nivel de grado y sexo). Su base de datos de población Excel para los 265 estudiantes de sexto grado y 175 estudiantes de onceavo grado en su distrito tiene la siguiente descripción:

Columna	Nombre	Descripción
1	ID	Números de identificación de 1 a 440. 1–128 mujeres de sexto grado 129–265 hombres de sexto grado 266–363 mujeres de onceavo grado 364–440 hombres de onceavo grado
2	Mensajes de texto	Número de minutos por día enviando mensajes de texto (número natural)
3	TiempoR	Tiempo en segundos para responder a un estímulo en la pantalla del ordenador (dos decimales)
4	Tarea	Número total de horas por semana en que hacen tarea (con un decimal)
5	Dormir	Número de horas por noche en que duermen (con un decimal)

a. Ken decide basar su estudio sobre una muestra aleatoria de 20 estudiantes de sexto grado y una muestra aleatoria de 20 estudiantes de onceavo grado. Los estudiantes de sexto grado tienen ID 1–265, y los estudiantes de onceavo grado se numeran 266–440. Aconséjale sobre cómo muestrear al azar 20 estudiantes de sexto grado y 20 de onceavo grado de su archivo de datos.

Supón que a partir de un generador de números aleatorios:

Los números al azar de identificación para 20 estudiantes de sexto grado de Ken:
$231\ \ 15\ \ 19\ \ 206\ \ 86\ \ 183\ \ 233\ \ 253\ \ 142\ \ 36\ \ 195\ \ 139\ \ 75\ \ 210\ \ 56\ \ 40\ \ 66\ \ 114\ \ 127\ \ 9$

Los números de identificación aleatorios para sus 20 estudiantes de onceavo grado:
$391\ \ 319\ \ 343\ \ 426\ \ 307\ \ 360\ \ 289\ \ 328\ \ 390\ \ 350\ \ 279\ \ 283\ \ 302\ \ 287\ \ 269\ \ 332\ \ 414\ \ 267\ \ 428\ \ 280$

b. Para cada conjunto, encuentra los datos de horas de tarea de la base de datos de población que corresponde a estos números de identificación seleccionados al azar.

c. En la misma escala, dibuja diagramas de puntos para los dos conjuntos de datos de muestra.

d. Da tu análisis de los diagramas de puntos, haz una lista de algunas observaciones que comparen el número de horas por semana que los estudiantes de sexto grado usan para hacer tarea y el número de horas por semana que los estudiantes de onceavo grado usan en hacer tarea.

e. Calcula la media y la MAD para cada uno de los conjuntos de datos. ¿Cuántas MAD separan las dos medias de la muestra? (Usa la MAD más grande para hacer este cálculo, si MAD de las muestras no son iguales).

	Media (horas)	**MAD (horas)**
Sexto grado		
Onceavo grado		

f. Ken se acordó que Linda sugirió que si el número de MAD es mayor que o igual a 2, entonces sería razonable pensar que la población de todos los estudiantes de sexto grado en su distrito y la población de todos los estudiantes de onceavo grado en su distrito tienen diferentes medias. ¿Qué es lo que Ken concluye con base en su estudio de tareas?

Grupo de problemas

1. Basándote en la base de datos de la población de Ken, compara la cantidad de sueño que las mujeres de sexto grado reciben en promedio a la cantidad de sueño que las mujeres del onceavo grado reciben en promedio.

   Encuentra los datos para 15 mujeres de sexto grado en base a los siguientes números de identificación al azar:
   $65\ \ 1\ \ 67\ \ 101\ \ 106\ \ 87\ \ 85\ \ 95\ \ 120\ \ 4\ \ 64\ \ 74\ 102\ \ 31\ \ 128$

   Encuentra los datos para 15 mujeres de onceavo grado en base a los siguientes números de identificación al azar:
   $348\ \ 313\ \ 297\ \ 351\ \ 294\ \ 343\ \ 275\ \ 354\ \ 311\ \ 328\ \ 274\ \ 305\ \ 288\ \ 267\ \ 301$

2. En la misma escala, dibuja diagramas de puntos para los dos conjuntos de datos de muestra.

3. Viendo los diagramas de puntos, haz una lista de algunas observaciones que comparen el número de horas por semana en que los estudiantes de sexto grado hacen tarea y el número de horas por semana en que los estudiantes de onceavo grado hacen tarea.

4. Calcula la media y la MAD para cada uno de los conjuntos de datos. ¿Cuántas MAD separan las dos medias de la muestra? (Usa la MAD más grande para hacer este cálculo, si las MAD de la muestra no son iguales).

	Media (horas)	**MAD (horas)**
Mujeres de sexto grado		
Mujeres de onceavo grado		

5. Recuerda que si el número de MAD en la diferencia de dos medias de la muestra es mayor que o igual a 2, entonces sería razonable pensar que las medias de población son diferentes. Usando esta pauta, ¿qué se puede decir sobre el número promedio de horas de sueño por noche para todas las mujeres de sexto grado en la población en comparación con todas las mujeres del onceavo grado en la población?

Paquete de recortables

Plantilla para Bolsas A y B

5	5	5	5	5	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	10	10	10	10	10
11	11	11	11	11	12	12	12	12	12
13	13	13	13	13	14	14	14	14	14
15	15	15	15	15	16	16	16	16	16
17	17	17	17	17	18	18	18	18	18
19	19	19	19	19	20	20	20	20	20
21	21	21	21	21	22	22	22	22	22
23	23	23	23	23	24	24	24	24	24

Plantilla para Bolsa C

1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	10	10	10	10	10
11	11	11	11	11	12	12	12	12	12
13	13	13	13	13	14	14	14	14	14
15	15	15	15	15	16	16	16	16	16
17	17	17	17	17	18	18	18	18	18
19	19	19	19	19	20	20	20	20	20