Una historia de proporciones®

Eureka Math™

7.º grado Módulo 3

Archivo del estudiante_A

Contiene Trabajo en clase y Tareas reproducibles,
así como plantillas (que incluyen recortables)

Publicado por la organización sin fines de lucro Great Minds.

Impreso en EE. UU.
Este libro puede comprarse directamente en la editorial en eureka-math.org
10 9 8 7 6 5 4 3 2

G7-M3-SFA-1.1.0-07.2017

Lección 1: Generación de expresiones equivalentes

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

Cada sobre contiene una serie de triángulos y un número de cuadriláteros. Para este ejercicio, deja t el número de triángulos y sea q el número de cuadriláteros.

a. Escribe una expresión utilizando t y q que represente el número total de partes en tu sobre. Explica cuáles son los términos que tu expresión representa.

b. Tu compañero y tú tienen el mismo número de triángulos y cuadriláteros en sus sobres. Escribe una expresión que represente el número total de partes que tu compañero y tú tienen. Si es posible, escribe más de una expresión para representar este total.

c. Cada sobre en la clase contiene el mismo número de triángulos y cuadriláteros. Escribe una expresión que represente el número total de lados en el salón.

d. Utiliza los valores dados de t y q en tu expresión de la parte (a) para determinar el número de lados que deben encontrarse en tu sobre.

e. Utiliza los mismos valores para t y q y tu expresión de la parte (b) para determinar el número de lados que deben estar en el sobre y el sobre de tu compañero en total.

f. Utiliza los mismos valores para t y q y tu expresión de la parte (c) para determinar el número de lados que deben estar en todos los sobres.

g. ¿Qué notas acerca de las diversas expresiones en partes (e) y (f)?

Ejemplo 1: La propiedad de cualquier orden, cualquier agrupación con suma

a. Reescribe $5x + 3$ y $5x - 3x$ combinando los términos semejantes.

Escribe las expresiones originales y expande cada término usando la suma. ¿A qué son equivalentes las nuevas expresiones?

b. Encuentra la suma de $2x + 1$ y $5x$.

c. Encuentra la suma de $-3a + 2$ y $5a - 3$.

Ejemplo 2: Cualquier orden, cualquier agrupación con la multiplicación

Encuentra el producto de $2x$ y 3.

Ejemplo 3: Cualquier orden, cualquier agrupación en expresiones con suma y multiplicación

Utiliza cualquier orden, cualquier agrupación para escribir las expresiones equivalentes.

a. $3(2x)$

b. $4y(5)$

c. $4 \cdot 2 \cdot z$

d. $3(2x) + 4y(5)$

e. $3(2x) + 4y(5) + 4 \cdot 2 \cdot z$

f. Alexander dice que $3x+4y$ es equivalente a $(3)(4) + xy$ por cualquier orden, cualquier agrupación. ¿Tiene razón? ¿Por qué sí o por qué no?

Vocabulario relevante

VARIABLE (DESCRIPCIÓN): Una *variable* es un símbolo (como una letra) que representa un número (es decir, es un marcador de posición para un número).

EXPRESIÓN NUMÉRICA (DESCRIPCIÓN): Una *expresión numérica* es un número, o es cualquier combinación de sumas, diferencias, productos o divisiones de números que da como resultado un número.

VALOR DE UNA EXPRESIÓN NUMÉRICA: El *valor de una expresión numérica* es el número que se encuentra mediante la resolución de la expresión.

EXPRESIÓN (DESCRIPCIÓN): Una *expresión* es una expresión numérica, o es el resultado de la sustitución de algunos (o todos) de los números en una expresión numérica con variables.

EXPRESIONES EQUIVALENTES: Dos expresiones son *equivalentes* si ambas expresiones dan como resultado el mismo número en cada sustitución de números en todas las letras en ambas expresiones.

UNA EXPRESIÓN EN FORMA EXPANDIDA: Una expresión que se escribe como sumas (y/o diferencias) de productos cuyos factores son números, variables o variables elevadas a potencias de números enteros se dice que están en *forma expandida*. Un solo número, una variable o un solo producto de números y/o variables también se considera como forma expandida. Los ejemplos de expresiones en forma expandida incluyen: 324, $3x$, $5x + 3 - 40$ y $x + 2x + 3x$.

TÉRMINO (DESCRIPCIÓN): Cada sumando de una expresión en forma expandida se denomina *término*. Por ejemplo, la expresión
$2x+3x + 5$ consta de tres términos: $2x$, $3x$ y 5.

COEFICIENTE DEL TÉRMINO (DESCRIPCIÓN): El número que se encuentra multiplicando solo los números en un término es el *coeficiente* del término. Por ejemplo, teniendo dado el producto $2 \cdot x \cdot 4$, su término equivalente es $8x$. El número 8 se llama el coeficiente del término $8x$.

UNA EXPRESIÓN EN FORMA ESTÁNDAR: A una expresión en forma expandida con todos sus términos semejantes se le llama *forma estándar*. Por ejemplo, $2x+3x + 5$ es una expresión escrita en forma expandida; sin embargo, para ser escrita en forma estándar, los términos semejantes $2x$ y $3x$ deben ser combinados. La expresión equivalente $5x + 5$ está escrita en forma estándar.

Resumen de la lección

Los términos que contienen exactamente el mismo símbolo de la variable pueden combinarse sumándose o restándose porque la variable representa el mismo número. Cualquier orden, cualquier agrupación pueden ser utilizados donde los términos se suman (o restan) con el fin de agrupar los términos semejantes. Cambiar el orden de los términos en una suma no afecta al valor de la expresión para valores dados de las variables.

Grupo de problemas

Para los Problemas 1-9, escribe las expresiones equivalentes combinando los términos semejantes. Comprueba la equivalencia de tu expresión y la expresión dada comprobando cada uno de los valores dados: $a = 2$, $b = 5$ y $c =- 3$.

1. $3a + 5a$
2. $8b - 4b$
3. $5c + 4c + c$
4. $3a + 6 + 5a$
5. $8b + 8 - 4b$
6. $5c - 4c + c$
7. $3a + 6 + 5a - 2$
8. $8b + 8 - 4b - 3$
9. $5c - 4c + c - 3c$

Utiliza cualquier orden, cualquier agrupación para escribir las expresiones equivalentes combinando los términos semejantes. Después, comprueba la equivalencia de tu expresión con la expresión dada comprobando los valores dados en cada problema.

10. $3(6a)$; para $a = 3$
11. $5d(4)$; para $d = -2$
12. $(5r)(-2)$; para $r = -3$
13. $3b(8) + (-2)(7c)$; para $b = 2$, $c = 3$
14. $-4(3s) + 2(-t)$; para $s = \frac{1}{2}$, $t = -3$
15. $9(4p) - 2(3q) + p$; para $p = -1$, $q = 4$
16. $7(4g) + 3(5h) + 2(-3g)$; para $g = \frac{1}{2}$, $h = \frac{1}{3}$

Los problemas a continuación son las preguntas referentes al Ejemplo 1, parte (b) del Trabajo de clase: Encuentra la suma de $2x + 1$ y $5x$.

17. Jack obtuvo la expresión $7x + 1$ y después escribió su respuesta como $1 + 7x$. ¿Su respuesta es una expresión equivalente? ¿Cómo lo sabes?

18. Jill también obtuvo la expresión $7x + 1$ y después escribió su respuesta como $1x + 7$. ¿Su expresión es una expresión equivalente? ¿Cómo lo sabes?

Lección 2: Generación de expresiones equivalentes

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

Los inversos aditivos suman cero. Llena la columna central de la tabla con el opuesto del número o expresión dada, después prueba que son opuestos. La primera fila se ha completado como ejemplo.

Expresión	Opuesto	Prueba de opuestos
1	-1	$1+(-1)=0$
3		
-7		
$-\frac{1}{2}$		
x		
$3x$		
$x+3$		
$3x-7$		

Ejemplo 1: Restar expresiones

a. Resta: $(40 + 9) - (30 + 2)$.

b. Resta: $(3x + 5y - 4) - (4x + 11)$.

Ejemplo 2: Combinar las expresiones verticalmente

a. Encuentra la suma alineando las expresiones verticalmente.
$(5a + 3b - 6c) + (2a - 4b + 13c)$

b. Encuentra la resta alineando las expresiones verticalmente.
$(2x + 3y - 4) - (5x + 2)$

Ejemplo 3: Usar expresiones para resolver problemas

Una barra tiene x metros de largo. Una cadena es 4 veces más larga que la barra.

a. Expresa la longitud de la barra en términos de x.

b. Si la longitud total de la cadena y de la barra es 15 metros de largo, ¿qué tan larga es la cadena?

Ejemplo 4: Expresiones de problemas escritos

Alquilar una unidad de almacén le cuesta a Margo una cuota de $\$3$, además de $\$17$ por mes para mantener sus pertenencias en la unidad. Su amiga Carissa quiere guardar una caja con sus pertenencias en el almacén de Margo y le dice que le pagará $\$1$ de la cuota y $\$3$ por cada mes que guarde la caja en el almacén. Escribe una expresión en forma estándar que represente la cantidad que Margo tendrá que pagar por el almacén si Carissa contribuye. Después, determina la cantidad que Margo pagará si utiliza el almacén durante 6 meses.

Ejemplo 5: Extender el uso del inverso a la división

Los inversos multiplicativos tienen un producto de 1. Encuentra los inversos multiplicativos de los términos de la primera columna. Demuestra que el número dado y su inverso multiplicativo tienen un producto de 1. Después, utiliza el inverso para escribir cada expresión correspondiente en forma estándar. La primera fila se ha completado como ejemplo.

Dado	Inverso multiplicativo	Demuestra que su producto es 1.	Usa cada inverso para escribir abajo su expresión correspondiente en forma estándar.
3	$\frac{1}{3}$	$3 \cdot \frac{1}{3}$ $\frac{3}{1} \cdot \frac{1}{3}$ $\frac{3}{3}$ 1	$12 \div 3$ $12 \cdot \frac{1}{3}$ 4
5			$65 \div 5$
-2			$18 \div (-2)$
$-\frac{3}{5}$			$6 \div \left(-\frac{3}{5}\right)$
x			$5x \div x$
2x			$12x \div 2x$

Vocabulario relevante

UNA EXPRESIÓN EN FORMA EXPANDIDA: Una expresión que se escribe como sumas (y/o diferencias) de productos cuyos factores son números, variables o variables elevadas a potencias de números enteros se dice que están en *forma expandida*. Un solo número, una variable o un solo producto de números y/o variables también se considera como forma expandida. Los ejemplos de expresiones en forma expandida incluyen: 324, $3x$,$5x + 3 - 40$ y $x + 2x + 3x$.

TÉRMINO: Cada sumando de una expresión en forma expandida se denomina *término*. Por ejemplo, la expresión $2x$+$3x + 5$ se compone de 3 términos: $2x$, $3x$ y 5.

COEFICIENTE DEL TÉRMINO: El número que se encuentra multiplicando solo los números en un término se denomina *coeficiente.* Por ejemplo, teniendo en cuenta el producto $2 \cdot x \cdot 4$, su término equivalente es $8x$. El número 8 se llama el coeficiente del término $8x$.

UNA EXPRESIÓN EN FORMA ESTÁNDAR: Una expresión en forma expandida con todos sus términos semejantes se llama *forma estándar*. Por ejemplo, $2x + 3x + 5$ es una expresión escrita en forma expandida; sin embargo, para ser escrita en forma estándar, los términos semejantes $2x$ y $3x$ deben ser combinados. La expresión equivalente $5x + 5$ está escrita en forma estándar.

Resumen de la lección

- Reescribe la resta como la suma del opuesto antes de usar cualquier orden, cualquier agrupación.
- Reescribe la división como multiplicación por el recíproco antes de usar cualquier orden, cualquier agrupación.
- El opuesto de una suma es la suma de sus opuestos.
- La división es equivalente a multiplicar por el recíproco.

Grupo de problemas

1. Escribe cada expresión en forma estándar. Comprueba que tu expresión es equivalente a la dada por la evaluación de cada expresión usando $x = 5$.

a. $3x+(2-4\mathrm{x})$	b. $3x+(-2+4x)$	c. $-3x+(2+4x)$
d. $3x+(-2-4x)$	e. $3x-(2+4x)$	f. $3x-(-2+4x)$
g. $3x-(-2-4x)$	h. $3x-(2-4x)$	i. $-3x-(-2-4x)$

j. En los problemas (a)-(d) anteriores, ¿qué efecto tiene la suma sobre los términos entre paréntesis cuando se quitan los paréntesis?

k. En los problemas (e)-(i), ¿qué efecto tiene la resta sobre los términos entre paréntesis cuando se quitan los paréntesis?

2. Escribe cada expresión en forma estándar. Comprueba que tu expresión es equivalente a la dada mediante la evaluación de cada expresión para el valor dado de la variable.

a. $4y$-$(3+y)$; $y=2$	b. $(2b+1)-b$; $b=-4$	c. $(6c-4)$-$(\mathrm{c}-3)$; $\mathrm{c}=-7$
d. $(d+3d)-(-d+2)$; $d=3$	e. $(-5x-4)-(-2-5x)$; $x=3$	f. $11f-(-2f+2)$; $f=\frac{1}{2}$
g. $-5g+(6g-4)$; $g=-2$	h. $(8h-1)-(h+3)$; $h=-3$	i. $(7+w)-(w+7)$; $w=-4$
j. $(2g+9h-5)-(6g-4h+2)$, $g=-2$, y $h=5$.		

3. Escribe cada expresión en forma estándar. Comprueba que tu expresión es equivalente a la dada mediante la evaluación de ambas expresiones para el valor dado de la variable.

a. $-3(8x);\ x = \frac{1}{4}$	b. $5 \cdot k \cdot (-7);\ k = \frac{3}{5}$	c. $2(-6x) \cdot 2;\ x = \frac{3}{4}$
d. $-3(8x)+6(4x);\ x = 2$	e. $8(5m) + 2(3m);\ m = -2$	f. $-6(2v) + 3a(3);\ v = \frac{1}{3}; a = \frac{2}{3}$

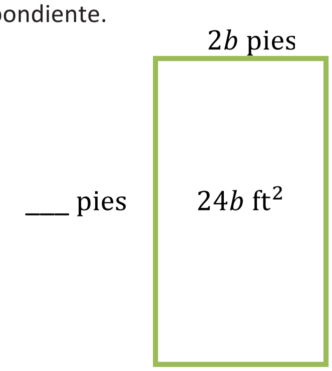
4. Escribe cada expresión en forma estándar. Comprueba que tu expresión es equivalente a la dada mediante la evaluación de ambas expresiones para el valor dado de la variable.

a. $8x \div 2;\ x = -\frac{1}{4}$	b. $18w \div 6;\ w = 6$	c. $25r \div 5r;\ r = -2$
d. $33y \div 11y;\ y = -2$	e. $56k \div 2k;\ k = 3$	f. $24xy \div 6y;\ x = -2; y = 3$

5. Para cada problema (a)-(g), escribe una expresión en forma estándar.
   a. Encuentra la suma de $-3x$ y $8x$.
   b. Encuentra la suma de $-7g$ y $4g + 2$.
   c. Encuentra la diferencia cuando $6h$ se resta de $2h - 4$.
   d. Encuentra la diferencia cuando $-3n - 7$ se resta de $n + 4$.
   e. Encuentra el resultado cuando $13v + 2$ se resta de $11 + 5v$.
   f. Encuentra el resultado cuando $-18m - 4$ se suma a $4m - 14$.
   g. ¿Cuál es el resultado cuando $-2x + 9$ se resta de $-7x + 2$?

6. Marty y Stewart están rellenando sobres con tarjetas. Están poniendo x tarjetas en cada sobre. Cuando terminan, Marty tiene 15 sobres llenos y le sobraron 4 tarjetas, y Stewart tiene 12 sobres llenos y le sobraron 6 tarjetas. Escribe una expresión en forma estándar que representa el número de tarjetas con las que los chicos comenzaron. Explica lo que significa tu expresión.

7. El área del rectángulo que muestra a continuación es $24b$ ft^2. Su ancho es $2b$ pies. Encuentra la altura del rectángulo e indica las propiedades que se utilizan en el paso correspondiente.



Lección 3: Escribir productos como sumas y sumas como productos

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

Resuelve el problema con un diagrama de cinta. Jorge y Benjamín compartieron una suma de dinero en una proporción de $3:4$. Si la suma de dinero fue de $\$56.00$, ¿cuánto le tocó a Jorge?

Ejemplo 1

Representa $3+2$ utilizando un diagrama de cinta.

Representa $x+2$ utilizando un diagrama de cinta.

Dibuja una matriz rectangular para $3(3+2)$.

Dibuja una matriz para $3(x+2)$.

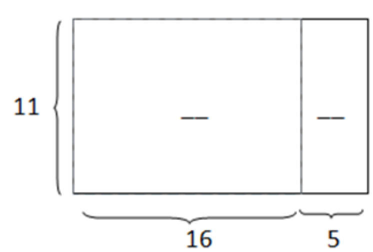
Términos clave

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA: La propiedad distributiva puede escribirse como la identidad

$a(b+c) = ab + ac$ para todos los números a, b y c.

Ejercicio 1

Determina el área de cada región utilizando la propiedad distributiva.



Ejemplo 2

Dibuja un diagrama de cinta para representar cada expresión.

a. $(x + y) + (x + y) + (x + y)$

b. $(x + x + x) + (y + y + y)$

c. $3x + 3y$

d. $3(x + y)$

Ejemplo 3

Encuentra una expresión equivalente representando la matriz rectangular y aplicando la propiedad distributiva para la expresión $5(8x + 3)$.

Ejercicio 2

Para las partes (a) y (b), dibuja una matriz para cada expresión y aplica la propiedad distributiva para expandir cada expresión. Sustituye los valores numéricos dados para demostrar la equivalencia.

a. $2(x + 1), x = 5$

b. $10(2c + 5), c = 1$

Para las partes (c) y (d), aplica la propiedad distributiva. Sustituye los valores numéricos dados para demostrar la equivalencia.

c. $3(4f - 1), f = 2$

d. $9(-3r - 11), r = 10$

Ejemplo 4

Reescribe la expresión $(6x + 15) \div 3$ en forma estándar utilizando la propiedad distributiva.

Ejercicio 3

Reescribe las expresiones en forma estándar.

a. $(2b + 12) \div 2$

b. $(20r - 8) \div 4$

c. $(49g - 7) \div 7$

Ejemplo 5

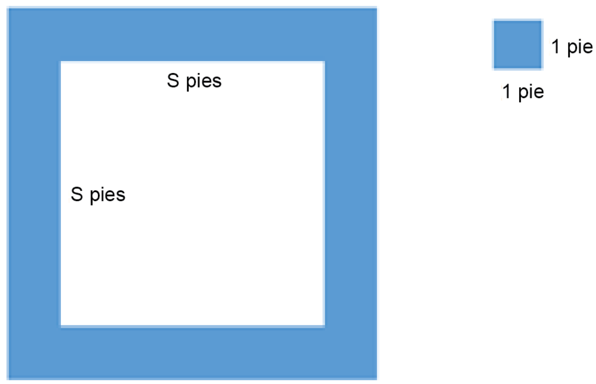
Expande la expresión $4(x + y + z)$.

Ejercicio 4

Expande la expresión de un producto como una suma eliminando los símbolos de agrupación, utilizando un modelo de área y el uso repetido de la propiedad distributiva: $3(x + 2y + 5z)$.

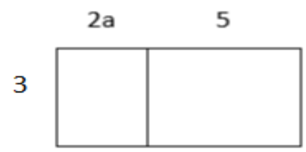
Ejemplo 6

El área de la fuente cuadrada tiene una longitud lateral de s ft y un borde con una sola fila de azulejos cuadrados como se muestra. Expresa el número total de azulejos necesarios en función de s de tres maneras diferentes.



Grupo de problemas

1.
   a. Escribe dos expresiones equivalentes que representen la matriz rectangular a continuación.



   b. Comprueba informalmente que las dos expresiones son equivalentes mediante la sustitución.

2. Tu amigo y tú hicieron un juego de tiros de baloncesto. Cada tiro hecho desde la línea de tiros libres vale 3 puntos y cada tiro realizado desde la marca de media cancha vale 6 puntos. Escribe una ecuación que represente el número total de puntos, P, si f representa el número de tiros realizados desde la línea de tiros libres y h representa el número de tiros realizados desde media cancha. Explica la ecuación en palabras.

3. Utiliza una matriz rectangular para escribir los productos en forma estándar.
   a. $2(x+10)$
   b. $3(4b+12c+11)$

4. Utiliza la propiedad distributiva para escribir los productos en forma estándar.
   a. $3(2x-1)$
   b. $10(b+4c)$
   c. $9(g-5h)$
   d. $7(4n-5m-2)$
   e. $\mathrm{a}(b+c+1)$
   f. $(8j-3l+9)6$
   g. $(40s+100t)\div 10$
   h. $(48p+24)\div 6$
   i. $(2b+12)\div 2$
   j. $(20r-8)\div 4$
   k. $(49g-7)\div 7$
   l. $(14g+22h)\div \frac{1}{2}$

5. Escribe la expresión en forma estándar expandiendo y agrupando los términos semejantes.
   a. $4(8m-7n)+6(3n-4m)$
   b. $9(r-s)+5(2r-2s)$
   c. $12(1-3g)+8(g+f)$

Lección 4: Escribir productos como sumas y sumas como productos

Trabajo en clase

Ejemplo 1

a. $2(x+5)$	
b. $3(x+4)$	
c. $6(x+1)$	
d. $7(x-3)$	
e.	$5x+30$
f.	$8x+8$
g.	$3x-12$
h.	$15x+20$

Ejercicio 1

Vuelve a escribir las expresiones como un producto de dos factores.

a. $72t+8$

c. $36z+72$

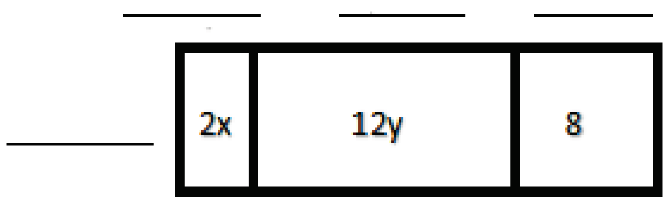
e. $3r+3s$

b. $55a + 11$

d. $144q - 15$

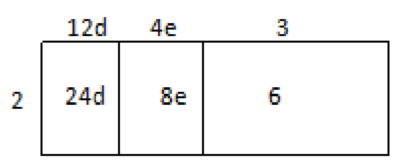
Ejemplo 2

Sean las variables x y y números enteros positivos, y sean $2x$, $12y$ y 8 el área de las tres regiones de la matriz. Determina la longitud y el ancho de cada rectángulo si el ancho es el mismo en cada rectángulo.



Ejercicio 2

a. Escribe el producto y la suma de las expresiones que representan la matriz rectangular.



b. Factoriza $48j + 60k + 24$ encontrando el máximo común divisor de los términos.

Ejercicio 3

Para cada expresión, escribe cada suma como un producto de dos factores. Enfatiza la importancia de la propiedad distributiva. Usa diversas expresiones equivalentes para justificar la equivalencia.

a. $2 \cdot 3 + 5 \cdot 3$

b. $(2+5)+(2+5)+(2+5)$

c. $2 \cdot 2 + (5+2) + (5 \cdot 2)$

d. $x \cdot 3 + 5 \cdot 3$

e. $(x+5)+(x+5)+(x+5)$

f. $2x + (5+x) + 5 \cdot 2$

g. $x \cdot 3 + y \cdot 3$

h. $(x+y)+(x+y)+(x+y)$

i. $2x + (y+x) + 2y$

Ejemplo 3

Un nuevo campo de golf en miniatura y de videojuegos se abrió en la ciudad. Para ordenar convenientemente, un paquete de juego está a la venta. Incluye dos rondas de golf y 20 fichas de juego, además de $3.00 de descuento del precio normal. Un grupo de seis amigos compran este paquete. Sea g el costo de una ronda de golf y sea t el costo de una ficha. Escribe dos expresiones diferentes que representen la cantidad total que este grupo gastó. Explica cómo cada expresión describe la situación de una manera diferente.

Ejercicio 4

a. ¿Cuál es el opuesto de $(-6v+1)$?

b. Usa la propiedad distributiva, escribe una expresión equivalente para la parte (a).

Ejemplo 5

Reescribe $5a-(a-3b)$ en forma estándar. Justifica cada paso, la aplicación de las reglas para restar y la propiedad distributiva.

Ejercicio 5

Expandir cada expresión y agrupar los términos semejantes.

a. $-3(2p-3q)$

b. $-a-(a-b)$

Grupo de problemas

1. Escribe cada expresión como el producto de dos factores.

   a. $1 \cdot 3 + 7 \cdot 3$
   b. $(1 + 7) + (1 + 7) + (1 + 7)$
   c. $2 \cdot 1 + (1 + 7) + (7 \cdot 2)$
   d. $h \cdot 3 + 6 \cdot 3$
   e. $(h + 6) + (h + 6) + (h + 6)$
   f. $2h + (6 + h) + 6 \cdot 2$
   g. $j \cdot 3 + k \cdot 3$
   h. $(j + k) + (j + k) + (j + k)$
   i. $2j + (k + j) + 2k$

2. Escribe cada suma como un producto de dos factores.

   a. $6 \cdot 7 + 3 \cdot 7$
   b. $(8 + 9) + (8 + 9) + (8 + 9)$
   c. $4 + (12 + 4) + (5 \cdot 4)$
   d. $2y \cdot 3 + 4 \cdot 3$
   e. $(x + 5) + (x + 5)$
   f. $3x + (2 + x) + 5 \cdot 2$
   g. $f \cdot 6 + g \cdot 6$
   h. $(c + d) + (c + d) + (c + d) + (c + d)$
   i. $2r + r + s + 2s$

3. Utiliza la siguiente matriz rectangular para contestar las siguientes preguntas.

	?	?	?
?	15f	5g	45

   a. Completa la información que falta.
   b. Escribe la suma representada en la matriz rectangular.
   c. Utiliza la información que falta de la parte (a) para escribir la suma de la parte (b) como un producto de dos factores.

4. Escribe la suma como un producto de dos factores.
   a. $81w + 48$
   b. $10 - 25t$
   c. $12a + 16b + 8$

5. Xander va al cine con su familia. Cada miembro de su familia compra una entrada y dos cajas de palomitas de maíz. Si hay cinco miembros en su familia, sea t el costo de un boleto y p el costo de una caja de palomitas de maíz. Escribe dos expresiones diferentes que representen la cantidad total que su familia gastó. Explica cómo cada expresión describe la situación de una manera diferente.

6. Escribe cada expresión en forma estándar.
   a. $-3(1 - 8m - 2n)$
   b. $5 - 7(-4q + 5)$
   c. $-(2h - 9) - 4h$
   d. $6(-5r - 4) - 2(r - 7s - 3)$

7. Combina los términos semejantes para escribir cada expresión en forma estándar.
   a. $(r - s) + (s - r)$
   b. $(-r + s) + (s - r)$
   c. $(-r - s) - (-s - r)$
   d. $(r - s) + (s - t) + (t - r)$
   e. $(r - s) - (s - t) - (t - r)$

Lección 5: Usar la identidad y su inversa para escribir expresiones equivalentes

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

a. Por la mañana, Harrison comprueba la temperatura exterior que fue de $-12°\text{F}$. Por la tarde, la temperatura se elevó $12°\text{F}$. Escribe una expresión que representa el cambio de temperatura. ¿Cuál fue la temperatura de la tarde?

b. Reescribe la resta como la suma inversa de los siguientes problemas y encuentra la suma.

i. $2 - 2$

ii. $-4 - (-4)$

iii. La diferencia de 5 y 5

iv. $g - g$

c. ¿Qué patrón se observa en la parte (a) y (b)?

d. Suma o resta.

i. $16 + 0$

ii. $0 - 7$

iii. $-4 + 0$

iv. $0 + d$

v. ¿Qué patrón se observa en las partes (i) a (iv)?

e. Tu hermano menor corre hacia ti y con entusiasmo exclama: "Estoy pensando en un número. Si lo sumo con el número 2 diez veces, es decir, $2 +$ mi número $+$ mi número $+$ mi número y así sucesivamente, entonces la respuesta es 2. ¿Cuál es mi número?" Casi inmediatamente contestas, "cero", pero ¿estás seguro? ¿Puedes encontrar un número diferente (distinto de cero) que tenga la misma propiedad? Si no, ¿puedes justificar que tu respuesta es la única respuesta correcta?

Ejemplo 1

Escribe la suma y después escribe una expresión equivalente agrupando los términos semejantes y eliminando los paréntesis.

a. $2x$ y $-2x + 3$

b. $2x - 7$ y el opuesto de $2x$

c. El opuesto de $(5x - 1)$ y $5x$.

Ejercicio 1

Con un compañero, túrnense los papeles del escritor y del orador. El orador expresa con palabras cómo reescribir la suma y las propiedades que justifican cada paso mientras que el escritor escribe lo que se dice sin ejemplos. Al final de cada problema, discutan en parejas las expresiones equivalentes resultantes.

Escribe la suma y después escribe una expresión equivalente agrupando los términos semejantes y eliminando los paréntesis siempre que sea posible.

a. -4 y $4b + 4$

b. $3x$ y $1 - 3x$

c. El opuesto de $4x$ y $-5+4x$.

d. El opuesto de $-10t$ y $t-10t$.

e. El opuesto de $(-7-4v)$ y $-4v$.

Ejemplo 2

- $\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{4}{3}\right)=$
- $4\times\frac{1}{4}=$
- $\frac{1}{9}\times 9=$
- $\left(-\frac{1}{3}\right)\times 3=$
- $\left(-\frac{6}{5}\right)\times\left(-\frac{5}{6}\right)=$

Escribe el producto y después escribe la expresión en forma estándar eliminando los paréntesis y combinando los términos semejantes. Justifica cada paso.

a. El inverso multiplicativo de $\frac{1}{5}$ y $\left(2x-\frac{1}{5}\right)$

b. El inverso multiplicativo de 2 y $(2x+4)$

c. El inverso multiplicativo de $\left(\frac{1}{3x+5}\right)$ y $\frac{1}{3}$

Ejercicio 2

Escribe el producto y después escribe la expresión en forma estándar eliminando los paréntesis y combinando los términos semejantes. Justifica cada paso.

a. El recíproco de 3 y $-6y - 3x$

b. El inverso multiplicativo de 4 y $4h - 20$

c. El inverso multiplicativo de $-\frac{1}{6}$ y $2 - \frac{1}{6}j$

Grupo de problemas

1. Llena las partes en blanco.

   a. La suma de $6c - 5$ y el opuesto de $6c$.

   $(6c - 5) + (-6c)$

____________	Rescribe la resta como suma
$6c + (-6c) + (-5)$	______________________________
$0 + (-5)$	______________________________
____________	Propiedad de identidad aditiva del cero

   b. El producto de $-2c + 14$ y el inverso multiplicativo de -2

   $(-2c + 14)\left(-\frac{1}{2}\right)$

$(-2c)\left(-\frac{1}{2}\right) + (14)\left(-\frac{1}{2}\right)$	______________________________
____________	Inverso multiplicativo, multiplicación
$1c - 7$	Sumar el inverso aditivo es lo mismo que restar
$c - 7$	______________________________

2. Escribe la suma y después reescribe la expresión en forma estándar eliminando los paréntesis y agrupando los términos semejantes.

   a. 6 y $p - 6$

   b. $10w + 3$ y -3

   c. $-x - 11$ y lo opuesto de -11

   d. Lo opuesto de $4x$ y $3 + 4x$

   e. $2g$ y el opuesto de $(1 - 2g)$.

3. Escribe el producto y después reescribe la expresión en forma estándar eliminando los paréntesis y agrupando los términos semejantes.

   a. $7h - 1$ y el inverso multiplicativo de 7

   b. El inverso multiplicativo de -5 y $10v - 5$

   c. $9 - b$ y el inverso multiplicativo de 9

   d. El inverso multiplicativo de $\frac{1}{4}$ y $5t - \frac{1}{4}$

   e. El inverso multiplicativo de $-\frac{1}{10x}$ y $\frac{1}{10x} - \frac{1}{10}$

4. Escribe las expresiones en forma estándar.

a. $\frac{1}{4}(4x + 8)$

b. $\frac{1}{6}(r - 6)$

c. $\frac{4}{5}(x + 1)$

d. $\frac{1}{8}(2x + 4)$

e. $\frac{3}{4}(5x - 1)$

f. $\frac{1}{5}(10x - 5) - 3$

Lección 6: Agrupar números racionales como términos semejantes

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

Resuelve cada problema, dejando tus respuestas en forma estándar. Muestra tus pasos.

a. Terry pesa 40 kg. Janice pesa $2\frac{3}{4}$ kg menos que Terry. ¿Cuál es el peso combinado de los dos?

b. $2\frac{2}{3} - 1\frac{1}{2} - \frac{4}{5}$

c. $\frac{1}{5} + (-4)$

d. $4\left(\frac{3}{5}\right)$

e. El Sr. Jackson compró $1\frac{3}{5}$ lb de carne. Preparó $\frac{3}{4}$ para el almuerzo. ¿Cuánto le queda?

Ejemplo 1

Reescribe la expresión en forma estándar agrupando los términos semejantes.

$$\frac{2}{3}n - \frac{3}{4}n + \frac{1}{6}n + 2\frac{2}{9}n$$

Ejercicio 1

En los siguientes ejercicios, predice cuántos términos de la expresión resultante tendrás después de agrupar los términos semejantes. Después, escribe la expresión en forma estándar agrupando los términos semejantes.

a. $\frac{2}{5}g - \frac{1}{6} - g + \frac{3}{10}g - \frac{4}{5}$

b. $i + 6i - \frac{3}{7}i + \frac{1}{3}h + \frac{1}{2}i - h + \frac{1}{4}h$

Ejemplo 2

En una tienda, una camisa estaba descontada en precio por $\$10.00$. Un par de pantalones tienen el doble del precio. Siguiendo estos cambios, el precio de cada artículo en la tienda se redujo a la mitad. Escribe dos expresiones diferentes que representen el nuevo costo de los artículos, utilizando s para el costo de cada camisa y p para el costo de un par de pantalones. Explica la diferente información que muestra cada uno.

Ejercicio 2

Escribe dos expresiones diferentes que representen el costo total de los artículos si el impuesto es $\frac{1}{10}$ del precio original. Explica la diferente información de cada muestra.

Ejemplo 3

Escribe esta expresión en forma estándar agrupando los términos semejantes. Justifica cada paso.

$$5\frac{1}{3} - \left(3\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$$

Ejercicio 3

Vuelve a escribir las siguientes expresiones en forma estándar buscado el producto y agrupando los términos semejantes.

a. $-6\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+y\right)$

b. $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}f-1\frac{1}{3}\right)$

Ejemplo 4

Representa la forma de escribir la expresión en forma estándar utilizando las reglas de los números racionales.

$$\frac{x}{20}+\frac{2x}{5}+\frac{x+1}{2}+\frac{3x-1}{10}$$

Resuelve la expresión original y las respuestas cuando $x = 20$. ¿Cómo se obtiene el mismo número?

Ejercicio 4

Reescribe la siguiente expresión en forma estándar buscando los denominadores comunes y agrupando los términos semejantes.

$$\frac{2h}{3} - \frac{h}{9} + \frac{h-4}{6}$$

Ejemplo 5

Reescribe la siguiente expresión en forma estándar.

$$\frac{2(3x-4)}{6}-\frac{5x+2}{8}$$

Método 1:	Método 2a: Método 2b:	Método 3:

Ejercicio 5

Escribe las siguientes expresiones en forma estándar:

$$\frac{2x-11}{4}-\frac{3(x-2)}{10}$$

Grupo de problemas

1. Escribe las expresiones que se indican.
   a. $\frac{1}{2}m$ pulgadas en pies
   b. El perímetro de un cuadrado cuyos lados son $\frac{2}{3}g$ cm
   c. El número de libras en 9 oz.
   d. La velocidad promedio de un tren que viaja x millas en $\frac{3}{4}$ horas
   e. Devin es $1\frac{1}{4}$ años menor que Eli. Abril tiene $\frac{1}{5}$ años más que Devin. Jill tiene 5 años más que Abril. Si Eli tiene E años, ¿cuál es la edad de Jill en términos de E?

2. Reescribe las expresiones agrupando los términos semejantes.
   a. $\frac{1}{2}k-\frac{3}{8}k$
   b. $\frac{2r}{5}+\frac{7r}{15}$
   c. $-\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}b-\frac{2}{3}b+\frac{5}{6}a$
   d. $-p+\frac{3}{5}q-\frac{1}{10}q+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}p+2\frac{1}{3}p$
   e. $\frac{5}{7}y-\frac{y}{14}$
   f. $\frac{3n}{8}-\frac{n}{4}+2\frac{n}{2}$

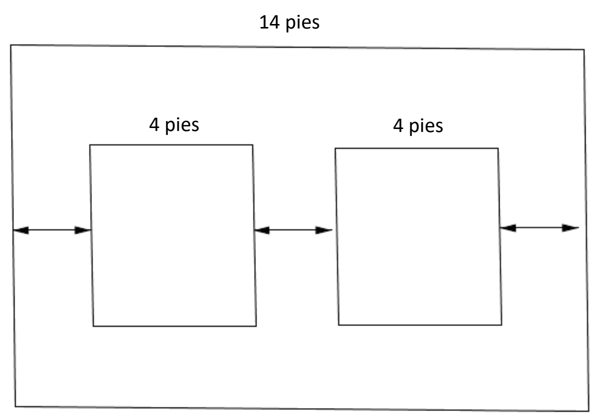
3. Reescribe las expresiones utilizando la propiedad distributiva y agrupando los términos semejantes.
   a. $\frac{4}{5}(15x-5)$
   b. $\frac{4}{5}\left(\frac{1}{4}c-5\right)$
   c. $2\frac{4}{5}v-\frac{2}{3}(4v+1\frac{1}{6})$
   d. $8-4\left(\frac{1}{8}r-3\frac{1}{2}\right)$
   e. $\frac{1}{7}(14x+7)-5$
   f. $\frac{1}{5}(5x-15)-2x$
   g. $\frac{1}{4}(p+4)+\frac{3}{5}(p-1)$
   h. $\frac{7}{8}(w+1)+\frac{5}{6}(w-3)$
   i. $\frac{4}{5}(c-1)-\frac{1}{8}(2c+1)$
   j. $\frac{2}{3}(h+\frac{3}{4})-\frac{1}{3}(h+\frac{3}{4})$
   k. $\frac{2}{3}(h+\frac{3}{4})-\frac{2}{3}(h-\frac{3}{4})$
   l. $\frac{2}{3}(h+\frac{3}{4})+\frac{2}{3}(h-\frac{3}{4})$
   m. $\frac{k}{2}-\frac{4k}{5}-3$
   n. $\frac{3t+2}{7}+\frac{t-4}{14}$
   o. $\frac{9x-4}{10}+\frac{3x+2}{5}$
   p. $\frac{3(5g-1)}{4}-\frac{2g+7}{6}$
   q. $-\frac{3d+1}{5}+\frac{d-5}{2}+\frac{7}{10}$
   r. $\frac{9w}{6}+\frac{2w-7}{3}-\frac{w-5}{4}$
   s. $\frac{1+f}{5}-\frac{1+f}{3}+\frac{3-f}{6}$

Lección 7: Comprender las ecuaciones

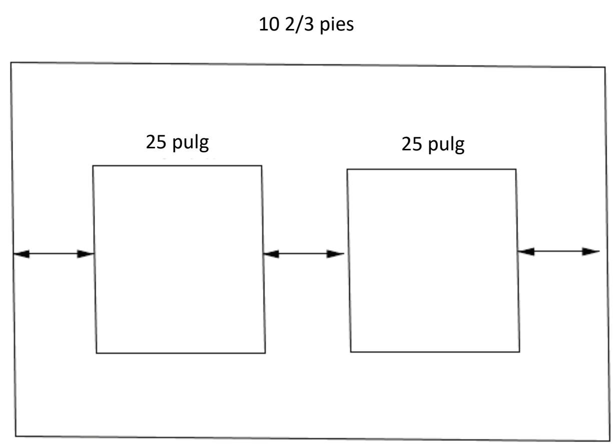
Trabajo en clase

Ejercicio inicial

Tu hermano se va a la universidad, por lo que ya no tienes que compartir el dormitorio. Decides volver a decorar una pared colgando dos nuevos carteles en la pared. La pared tiene 14 pies de ancho y cada cartel es de cuatro pies de ancho. Deseas colocar los carteles en la pared de manera que la distancia desde el borde de cada cartel hasta el borde más próximo de la pared sea la misma distancia entre los carteles, como se muestra en el siguiente diagrama. Determina la distancia.



Tus padres están redecorando la habitación del comedor y quieren colocar dos lámparas de pared de 25 pulgadas de ancho a lo largo de una pared de $10\frac{2}{3}$ pies de modo que la distancia entre las luces y las distancias de cada luz al borde más cercano de la pared sean todas iguales. Diseña la pared y determina la distancia.



Sea x ft sea la distancia entre una luz y el borde más próximo de una pared. Escribe una expresión en términos de x para la longitud total de la pared. Después, utiliza la expresión y la longitud de la pared dada en el problema para escribir una ecuación que se pueda utilizar para encontrar la distancia.

Ahora escribe una ecuación en la que y represente el número de *pulgadas*: Deja que y sea la distancia entre una luz y el borde más próximo de una pared en pulgadas. Escribe una expresión en términos de y para la longitud total de la pared. Después, utiliza la expresión y la longitud de la pared para escribir una ecuación que se pueda utilizar para encontrar la distancia (en pulgadas).

¿Qué valores de y hace a la segunda ecuación verdadera: 24, 25 o 26?

Ejemplo

Las edades de tres hermanas son números enteros consecutivos. La suma de sus edades es 45. Calcula sus edades.

a. Utiliza un diagrama de cinta para encontrar sus edades.

b. Si la hermana menor tiene x años, describe las edades de las otras dos hermanas en términos de x, escribe una expresión para la suma de sus edades en términos de x y utiliza esa expresión para escribir una ecuación que se puede utilizar para encontrar sus edades.

c. Determina si la respuesta de la parte (a) es una solución de la ecuación que escribiste en la parte (b).

Ejercicio

Sofía paga $\$19.99$ por una membresía en una tienda de música en línea.

a. Si también compra dos canciones de un nuevo disco a un precio de $\$0.99$ cada una, ¿cuál es el costo total?

b. Si Sofía compra n canciones por $\$0.99$ cada una, escribe una expresión para el costo total.

c. El amigo de Sofía ha ahorrado $\$118$ pero no está seguro de cuántas canciones puede comprar si ella compra la membresía y algunas canciones. Utiliza la expresión en la parte (b) para escribir una ecuación que se puede utilizar para determinar la cantidad de canciones que el amigo de Sofía puede comprar.

d. Usando la ecuación escrita en la parte (c), ¿puede el amigo de Sofía comprar 101, 100 o 99 canciones?

Vocabulario relevante

VARIABLE (DESCRIPCIÓN): Una *variable* es un símbolo (como una letra) que representa un número (es decir, es un marcador de posición para un número).

ECUACIÓN: Una *ecuación* es una afirmación de igualdad entre dos expresiones.

ENUNCIADO NUMÉRICO: Un *enunciado numérico* es una declaración de igualdad entre dos expresiones numéricas.

SOLUCIÓN: Una *solución* de una ecuación con una variable es un número que, cuando se sustituye por la variable en ambas expresiones, hace que la ecuación sea un enunciado numérico verdadero.

Resumen de la lección

En muchos problemas escritos, una ecuación a menudo se forma mediante el establecimiento de una expresión igual a un número. Para construir la expresión, es útil tener en cuenta algunos cálculos numéricos con sólo números primero. Por ejemplo, si una libra de manzanas cuesta $\$2$, entonces tres libras cuestan $\$6$ (2×3), cuatro libras cuestan $\$8$ (2×4) y n libras cuestan $2n$ dólares. Si tuviéramos $\$15$ para gastar en manzanas y quisiéramos saber cuántas libras podríamos comprar, podemos utilizar la expresión $2n$ para escribir una ecuación, $2n = 15$, la cual se puede utilizar para encontrar la respuesta: $7\frac{1}{2}$ libras.

Para determinar si un número es una solución de una ecuación, sustituye el número en la ecuación por la variable (letra) y comprueba si el número resultante es verdadero. Si es verdadero, entonces el número es una solución de la ecuación. Por ejemplo, $7\frac{1}{2}$ es una solución de $2n = 15$ porque $2\left(7\frac{1}{2}\right) = 15$.

Grupo de problemas

1. Comprueba si el valor dado es una solución a la ecuación.
   a. $4n - 3 = -2n + 9$ $\quad n = 2$
   b. $9m - 19 = 3m + 1$ $\quad m = \frac{10}{3}$
   c. $3(y + 8) = 2y - 6$ $\quad y = 30$

2. Indica si cada número es una solución al problema representado por la siguiente ecuación.
   Número misterioso: Cinco más un número multiplicado por -8 es 29. ¿Cuál es el número?
   Sea n el número misterioso.
   La ecuación es $5 + (-8)n = 29$.
   a. ¿3 es una solución a la ecuación? ¿Por qué sí o por qué no?
   b. ¿-4 es una solución a la ecuación? ¿Por qué sí o por qué no?
   c. ¿-3 es una solución a la ecuación? ¿Por qué sí o por qué no?
   d. ¿Cuál es el número misterioso?

3. La suma de tres números enteros consecutivos es 36.
   a. Encuentra el menor entero usando un diagrama de cinta.
   b. Sea n el número entero menor. Escribe una ecuación que se pueda usar para encontrar al número entero menor.
   c. Determina si cada valor de n a continuación es una solución de la ecuación de la parte (b).
      $n = 12.5$
      $n = 12$
      $n = 11$

4. Andrew está tratando de crear un rompecabezas para que su hermana menor lo resuelva. Desafía a su hermana a encontrar el número misterioso. "Cuando 4 se resta a la mitad de un número, el resultado es 5". La ecuación para representar el número misterioso es $\frac{1}{2}m - 4 = 5$. La hermana de Andrew trata de adivinar el número misterioso.

   a. Su primera suposición es 30. ¿Está en lo correcto? ¿Por qué sí o por qué no?

   b. Su segunda suposición es 2. ¿Está en lo correcto? ¿Por qué sí o por qué no?

   c. Su conjetura final es $4\frac{1}{2}$. ¿Está en lo correcto? ¿Por qué sí o por qué no?

Lección 8: Utilizar los pasos si-entonces en la resolución de ecuaciones

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

Recordar y resumir los pasos si-entonces.

Escribe $3 + 5 = 8$ en tantas ecuaciones verdaderas como puedas usando pasos si-entonces. Identifica qué paso si-entonces utilizaste.

Ejemplo 1

Julia, Keller e Israel son bomberos voluntarios. El sábado, el departamento de bomberos voluntarios llevó a cabo su recaudación de fondos anual en una farola. Después de una hora, Keller recaudó $\$42.50$ más que Julia, e Israel recaudó $\$15$ menos que Keller. Los tres bomberos recauderon $\$125.95$ en total. ¿Cuánto recaudó cada persona?

Encuentra la solución usando un diagrama de cinta.

¿Cuáles fueron las operaciones que utilizamos para obtener nuestra respuesta?

La cantidad de dinero recaudado por Julia es de j dólares. Escribe una expresión para representar la cantidad de dinero que Keller recaudó en dólares.

Usando las expresiones para Julia y Keller, escribe una expresión para representar la cantidad de dinero que Israel recaudó en dólares.

Usando las expresiones escritas anteriormente escribe una ecuación en términos de j que puede ser utilizada para encontrar la cantidad que cada uno recaudó.

Resuelve la ecuación escrita anteriormente para determinar la cantidad de dinero que cada persona recaudó y describe los pasos si-entonces usados.

Ejemplo 2

Estás diseñando un cerco rectangular para mascota para tu nuevo cachorro. Tienes 30 pies de cerca. Decides que te gustaría que la longitud fuera $6\frac{1}{3}$ pies más larga que el ancho.

Dibuja y nombra un diagrama para representar el cerco para mascotas. Escribe expresiones para representar el ancho y la longitud del cerco para mascotas.

Encuentra las dimensiones del cerco para mascotas.

Ejemplo 3

La rutina matutina de Nancy implica vestirse, desayunar, hacer su cama y conducir al trabajo. Nancy pasa $\frac{1}{3}$ del tiempo total de la mañana vistiéndose, 10 minutos comiendo el desayuno, 5 minutos haciendo su cama y el tiempo restante manejando al trabajo. Si Nancy pasa $35\frac{1}{2}$ minutos vistiéndose, desayunando y haciendo su cama, ¿cuánto tiempo es su camino al trabajo?

Escribe y resuelve este problema usando una ecuación. Identifica los pasos si-entonces utilizados en la resolución de la ecuación.

¿Es razonable tu respuesta? Explica.

Ejemplo 4

El número total de participantes que fue a la excursión de séptimo grado al Museo de Ciencias Naturales consistió en todos los estudiantes de séptimo grado y 7 acompañantes adultos. Dos tercios del total de participantes subieron a un autobús grande y el resto a un autobús más pequeño. Si 54 personas subieron al autobús grande, ¿cuántos estudiantes se fueron de excursión?

Resumen de la lección

Aproximación algebraica: *Resolver una ecuación* algebraicamente significa utilizar las propiedades de las operaciones y los pasos si-entonces para simplificar la ecuación en una forma en que la solución se fácilmente reconocible. Para las ecuaciones que estamos estudiando este año (llamadas ecuaciones lineales), esa forma es una ecuación que se ve como $x = \textit{un número}$, donde el número es la solución.

Pasos si-entonces: Si x es una solución de una ecuación, seguirá siendo una solución a la nueva ecuación formada por suma o resta de un número de ambos lados de la ecuación. También seguirá siendo una solución cuando ambos lados de la ecuación se multiplican por o dividen entre un número distinto de cero. Utilizamos estos pasos si-entonces para formar ceros y unos en formas que simplifican la ecuación original.

Primer paso útil: Si uno se enfrenta a la tarea de encontrar una solución a una ecuación, un primer paso útil es agrupar los términos semejantes en cada lado de la ecuación.

Grupo de problemas

Escribe y resuelve una ecuación para cada problema.

1. El perímetro de un rectángulo es 30 pulgadas. Si su longitud es tres veces su ancho, encuentra las dimensiones.

2. Una empresa de telefonía celular tiene un plan mensual básico de $\$40$ más $\$0.45$ por los minutos usados después de 700. Antes de recibir su recibo, Juan vio que era de un total de $\$48.10$. Escribe y resuelve una ecuación para determinar el número de minutos que debe haber usado durante el mes. Escribe una ecuación sin decimales.

3. Un entrenador de voleibol planea sus prácticas diarias para incluir 10 minutos de estiramiento, $\frac{2}{3}$ de toda la práctica de entrenamiento y el tiempo restante de practica en los ejercicios de habilidades específicas. El miércoles, el entrenador planifica 100 minutos de estiramiento y entrenamiento. ¿Cuánta duración tiene la práctica en horas?

4. La suma de dos números pares consecutivos es 54. Encuentra los números.

5. Justin tiene $\$7.50$ más que Eva, y Emma tiene $\$12$ menos que Justin. Juntos, tienen un total de $\$63.00$. ¿Cuánto dinero tiene cada persona?

6. La bicicleta de montaña de Barry pesa 6 libras más que la de Andy. Si sus bicicletas pesan 42 libras en total, ¿cuánto pesa la bicicleta de Barry? Identifica los pasos si-entonces en tu solución.

7. Trevor y Marissa tienen 26 camisetas para vender. Si Marissa tiene 6 camisetas menos que Trevor, encuentra cuántas camisetas tiene Trevor. Identifica los pasos si-entonces en tu solución.

8. Un número es $\frac{1}{7}$ de otro número. La diferencia de los números es 18. (Supón que estás restando el número más pequeño del más grande). Encuentra los números.

9. Un número es 6 más que $\frac{1}{2}$ de otro número. Si la suma de los números es 21, encuentra los números.

10. Kevin tiene el doble de edad que su hermano. Si Kevin tenia 8 años hace 2 años, ¿cuántos años tiene el hermano de Kevin ahora?

11. La suma de dos números impares consecutivos es 156. ¿Cuáles son los números?

12. Si n representa un entero impar, escribe expresiones en términos de n que representa los siguientes tres números enteros impares consecutivos. Si los cuatro números enteros impares consecutivos tienen una suma de 56, encuentra los números.

13. El costo de la entrada a un museo de historia es de $\$3.25$ para una persona mayor de 3; niños de 3 años y menores entran gratis. Si el costo total de la admisión para la familia Warrick, incluyendo sus dos gemelos de 6 meses, es $\$19.50$, encuentra el número de miembros de la familia que tienen más de 3 años.

14. Seis veces la suma de tres enteros impares consecutivos es -18. Encuentra los números enteros.

15. Estoy pensando en un número. Si multiplicas mi número por 4, sumas -4 al producto y después restas $\frac{1}{3}$ de la suma, el resultado es -6. Encuentra mi número.

16. Una máquina expendedora tiene el doble de monedas de 25 centavos de los que tiene de billetes de un dólar. Si las monedas de 25 centavos y los billetes de un dólar tienen un valor combinado de $\$96.00$, ¿cuántas monedas de 25 centavos hay en la máquina?

Lección 9: Utilizar los pasos si-entonces en la resolución de ecuaciones

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

Heather practica fútbol y piano. Cada día practica el piano durante 2 horas. Después de 5 días, practicó piano y fútbol por un total de 20 horas. Suponiendo que practicó fútbol la misma cantidad de tiempo cada día, ¿cuántas horas al día, h, practicó fútbol Heather?

Durante 5 días, Jake practicó el piano por un total de 2 horas. Jake practica fútbol la misma cantidad de tiempo cada día. Si practicó piano y fútbol por un total de 20 horas, ¿cuántas horas, h, al día practicó Jake fútbol?

Ejemplo 1

Fred y Sam son equipo en la carrera de bicicleta y caminata de 138.2 millas. Fred competirá en la carrera de bicicleta y Sam competirá en la caminata. Fred pedalea a una velocidad promedio de 8 millas por hora y Sam corre a una velocidad promedio de 4 millas por hora. La carrera de bicicleta comienza a las 6:00 am, seguida de la caminata. Sam predice que terminará la carrera a las 2:33 am del día siguiente.

a. ¿Cuántas horas les tomará completar la totalidad de la carrera?

b. Si t es el tiempo que tarda Fred en completar la carrera en bicicleta, en horas, escribe una expresión para encontrar la distancia total de Fred.

c. Escribe una expresión, en términos de t para expresar el tiempo de Sam.

d. Escribe una expresión, en términos de t, que representa la distancia total de Sam.

e. Escribe y resuelve una ecuación usando la distancia total que Fred y Sam viajarán.

f. ¿Qué distancia recorrerá Fred en bicicleta y cuánto tiempo le tomará completar su etapa de la carrera?

g. ¿Qué distancia correrá Sam y cuánto tiempo le tomará completar su etapa de la carrera?

Tiempo total (horas)	**Tiempo de Fred (horas)**	**Tiempo de Sam (horas)**
10	6	
15	12	
20	8	
18.35	8	
20.55	t	

Ejemplo 2

Shelby tiene siete veces la edad de Bonnie. Si en 5 años, la suma de las edades de Bonnie y Shelby es 98, encuentra la edad actual de Bonnie. Utiliza un enfoque algebraico.

Grupo de problemas

1. Una empresa compra un escáner digital por $\$12{,}000$. El valor del escáner es $12{,}000\left(1-\frac{n}{5}\right)$ después de n años. La compañía ha hecho un presupuesto para reemplazar el escáner cuando el valor comercial sea de $\$2{,}400$. ¿Después de cuántos años la compañía debe planear reemplazar la máquina con el fin de recibir este valor de recompra?

2. Miguel tiene 17 años más que Juan. En 4 años, la suma de sus edades será 49. Encuentra la edad actual de Miguel.

3. Brady montó su bicicleta 70 millas en 4 horas. Viajó a una velocidad promedio de 17 mph durante t horas, y a una velocidad promedio de 22 mph durante el resto del tiempo. ¿Cuánto tiempo se desplazó Brady a una velocidad más lenta? Utiliza la variable t para representar el tiempo, en horas, que Brady viajó a 17 mph.

4. Caitlan fue a la tienda a comprar ropa para la escuela. Tenía un crédito en la tienda por compras anteriores de $\$39.58$. Si compró 4 del mismo estilo de camiseta en diferentes colores y gastó un total de $\$52.22$ después del crédito de la tienda, ¿cuál fue el precio de cada camiseta que compró? Escribe y resuelve una ecuación con coeficientes enteros.

5. Un niño está creciendo a un ritmo de 3.5 cm por mes. Su altura actual es 90 cm. A ese ritmo, ¿en cuántos meses el niño crecerá hasta una altura de 132 cm?

6. La suma de un número, $\frac{1}{6}$ de ese número, $2\frac{1}{2}$ de ese número y 7 es $12\frac{1}{2}$. Encuentra el número.

7. La suma de dos números es 33 y su diferencia es 2. Encuentra los números.

8. Aiden vuelve a llenar tres máquinas de fichas en una tienda de videojuegos. Pone el doble del número de fichas en la máquina A que en la máquina B, y en la máquina C pone $\frac{3}{4}$ de lo que puso en la máquina A. Las tres máquinas tienen un total de $18{,}324$ fichas. ¿Cuántas fichas tiene cada máquina?

9. Paulie ordenó 250 plumas y 250 lápices para vender para recaudar fondos para un club de teatro. Las plumas cuestan 11 centavos más que los lápices. Si el costo total de la orden de Paulie es $\$42.50$, encuentra el costo de cada pluma y lápiz.

10. Una familia salió de su casa en dos vehículos al mismo tiempo. Uno de los coches viajó a un promedio de 7 millas por hora más rápido que el otro. Cuando el primer coche llegó a su destino después de $5\frac{1}{2}$ horas de conducir, los dos coches habían conducido un total de 599.5 millas. Si el segundo coche continúa a la misma velocidad promedio, ¿cuánto tiempo más, al minuto más cercano, pasará antes de que llegue el segundo coche?

11. Emily cuenta los triángulos y paralelogramos en una obra de arte y determina que en total, hay 42 triángulos y paralelogramos. Si hay 150 lados laterales, ¿cuántos triángulos y paralelogramos hay?

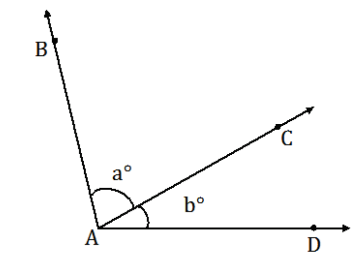
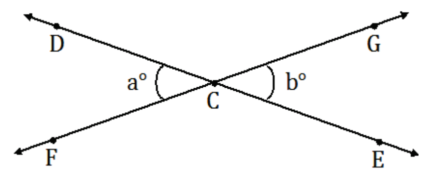
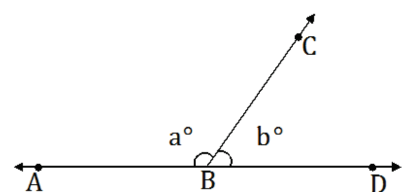
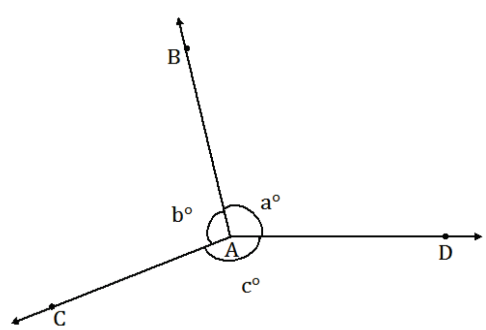
12. Stefan es tres años más joven que su hermana Katie. La suma de la edad de Stefan hace 3 años, y $\frac{2}{3}$ de la edad de Katie en ese momento es 12. ¿Qué edad tiene ahora Katie?

13. Lucas compró un determinado peso de avena para su caballo a un precio unitario de $\$0.20$ por libra. Después del costo total de la avena le quedó $\$1$. Quería comprar el mismo peso de avena enriquecida en su lugar, pero costaba $\$0.30$ por libra, le habrían faltado $\$2$ para pagar la cantidad total. ¿Cuánto dinero tenía Lucas para comprar la avena?

Lección 10: Problemas de ángulos y resolución de ecuaciones

Trabajo en clase

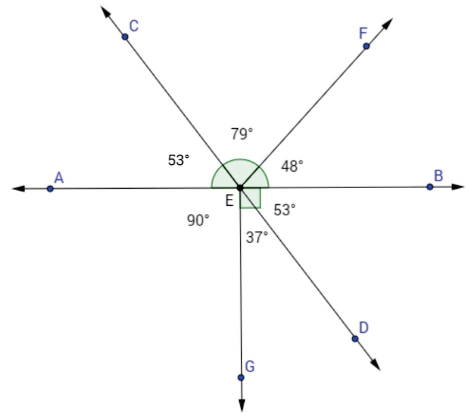
Teoremas y definiciones de ángulos

Nombre de relación del ángulo	**Teorema del ángulo**	**Diagrama**
Ángulos adyacentes		
Ángulos verticales (∠s vert.)		
Ángulos en una línea (∠s en una línea)		
Ángulos en un punto (∠s en un punto)		

Ejercicio inicial

Utiliza el diagrama para completar el cuadro.

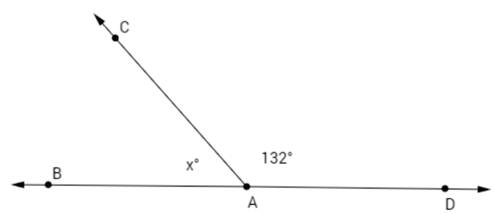
Pon el nombre de los ángulos...	
Vertical	
Adyacente	
Ángulos en una línea	
Ángulos en un punto	



Ejemplo 1

Estima la medida de x. _________

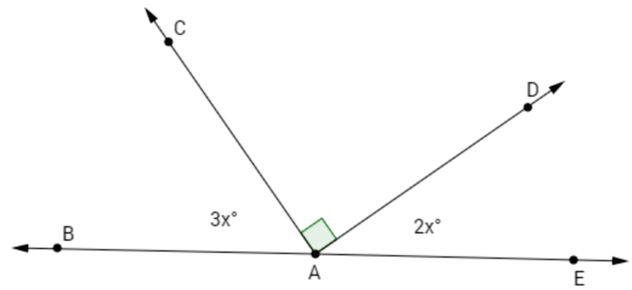
En un enunciado completo, describe la relación del ángulo en el diagrama.



Escribe la ecuación de la relación del ángulo que se muestra en la figura y resuélvelo para x. Después, encuentra las medidas de $\angle BAC$ y confirma tus respuestas midiendo el ángulo con un transportador.

Ejercicio 1

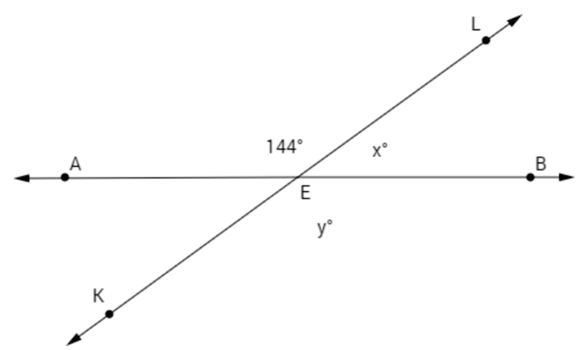
En un enunciado completo, describe la relación del ángulo en el diagrama.



Encuentra las medidas de $\angle BAC$ y $\angle DAE$.

Ejemplo 2

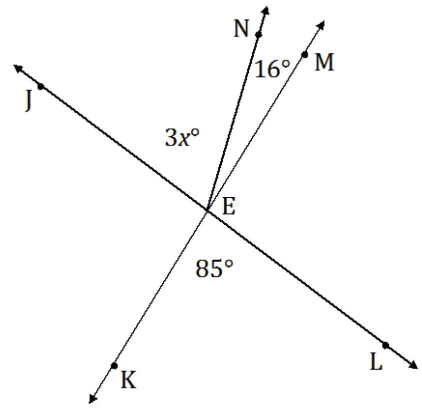
En un enunciado completo, describe la relación del ángulo en el diagrama.



Escribe la ecuación de la relación del ángulo que se muestra en la figura y resuélvelo para x y y. Encuentra las medidas de $\angle LEB$ y $\angle KEB$.

Ejercicio 2

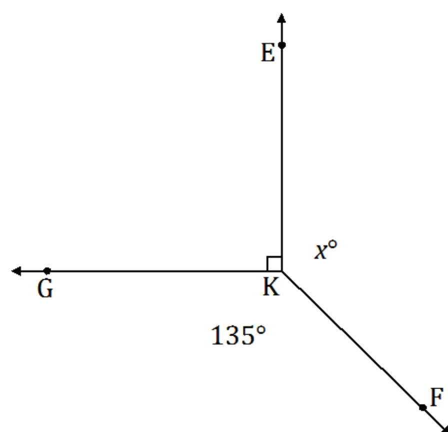
En un enunciado completo, describe las relaciones del ángulo en el diagrama.



Escribe la ecuación de la relación del ángulo que se muestra en la figura y resuélvelo para x.

Ejemplo 3

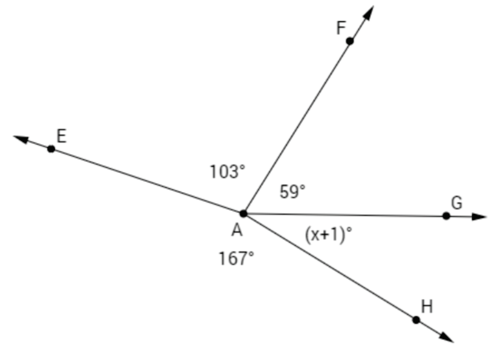
En un enunciado completo, describe las relaciones del ángulo en el diagrama.



Escribe la ecuación de la relación del ángulo que se muestra en la figura y resuélvelo para x. Encuentra la medida de $\angle EKF$ y confirma tus respuestas midiendo el ángulo con un transportador.

Ejercicio 3

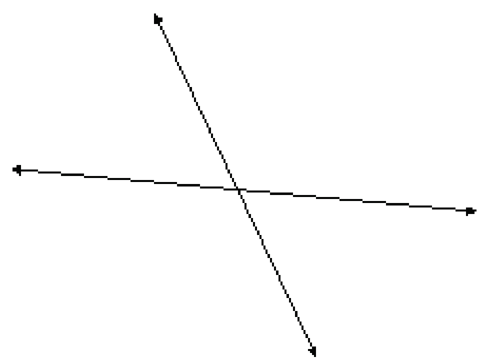
En un enunciado completo, describe las relaciones del ángulo en el diagrama.



Encuentra la medida de $\angle GAH$.

Ejemplo 4

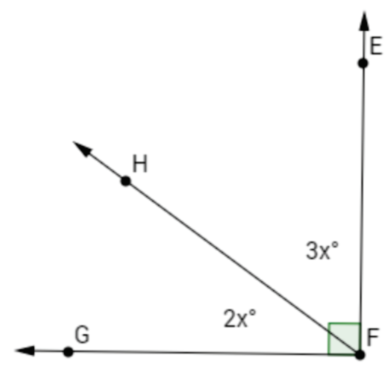
Las siguientes dos líneas se intersecan. La razón de las medidas del ángulo obtuso con el ángulo agudo en cualquier par de ángulos adyacentes en esta figura es $2:1$. En un enunciado completo, describe las relaciones del ángulo en el diagrama.



Nombra el diagrama con las expresiones que describen esta relación. Escribe una ecuación que represente la relación del ángulo y resuélvela para x. Encuentra las medidas de los ángulos agudos y obtusos.

Ejercicio 4

La razón de $m\angle GFH$ con $m\angle EFH$ es $2:3$. En un enunciado completo, describe las relaciones del ángulo en el diagrama.



Encuentra las medidas de $\angle GFH$ y $\angle EFH$.

Vocabulario relevante

Ángulos adyacentes: Dos ángulos, $\angle BAC$ y $\angle CAD$ con un lado común $\overrightarrow{AC}$, son *ángulos adyacentes* si C pertenece al interior de $\angle BAD$.

Ángulos verticales: Dos ángulos son *ángulos verticales* (o *ángulos verticalmente opuestos)* si sus lados forman dos pares de líneas opuestas.

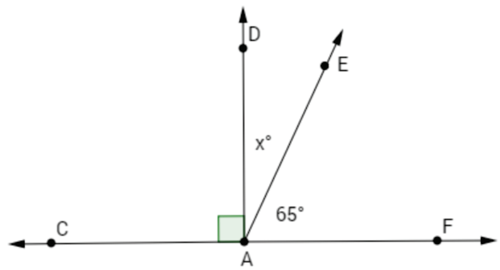
Ángulos en una línea: La suma de las medidas de los *ángulos adyacentes en una línea* es $180°$.

Ángulos en un punto: La suma de las medidas de los *ángulos adyacentes en un punto* es $360°$.

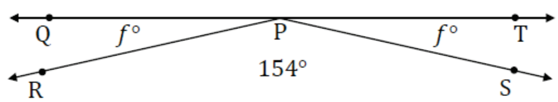
Grupo de problemas

Para cada pregunta, utiliza la relación entre los ángulos para escribir una ecuación con el fin de resolver cada variable. Determina los ángulos indicados. Puedes comprobar tus respuestas midiendo cada ángulo con un transportador.

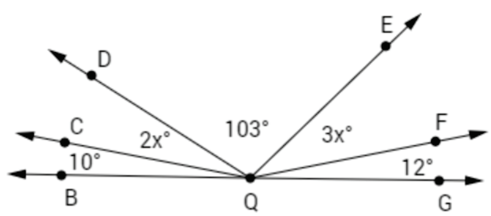
1. En un enunciado completo, describe las relaciones relevantes del ángulo en el siguiente diagrama. Encuentra la medida de $\angle DAE$.



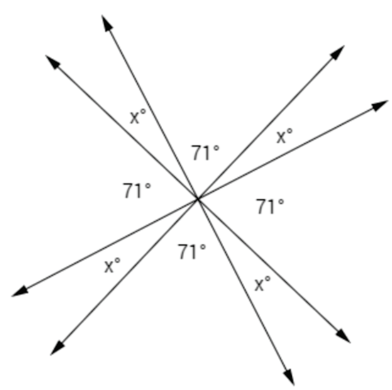
2. En un enunciado completo, describe las relaciones que existen entre los ángulos en el siguiente diagrama. Encuentra la medida de $\angle QPR$.



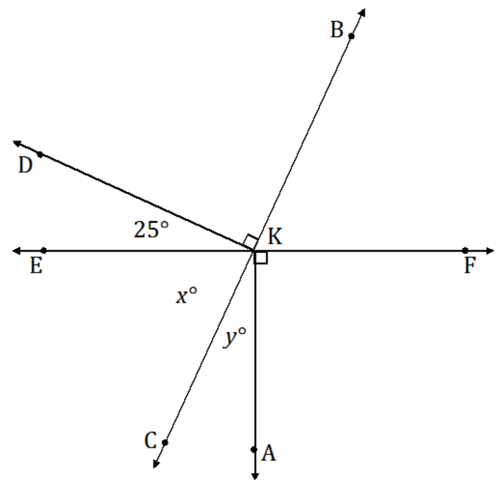
3. En un enunciado completo, describe las relaciones que existen entre los ángulos en el siguiente diagrama. Encuentra las medidas de $\angle CQD$ y $\angle EQF$.



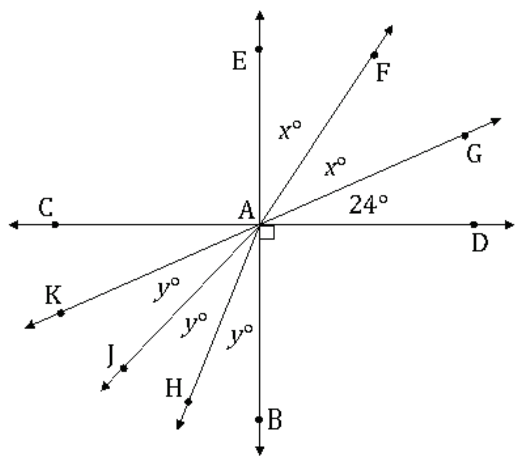
4. En un enunciado completo, describe las relaciones que existen entre los ángulos en el siguiente diagrama. Encuentra la medida de x.



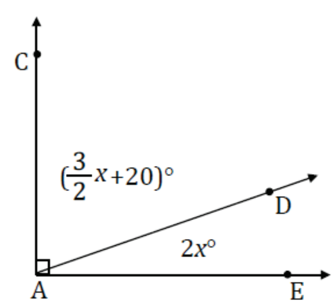
5. En un enunciado completo, describe las relaciones que existen entre los ángulos en el siguiente diagrama. Encuentra las medidas de x y y.



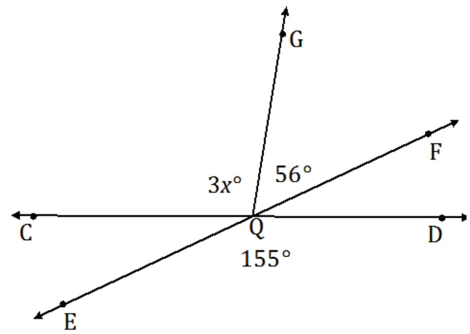
6. En un enunciado completo, describe las relaciones que existen entre los ángulos en el siguiente diagrama. Encuentra las medidas de x y y.



7. En un enunciado completo, describe las relaciones que existen entre los ángulos en el siguiente diagrama. Encuentra las medidas de $\angle CAD$ y $\angle DAE$.



8. En un enunciado completo, describe las relaciones que existen entre los ángulos en el siguiente diagrama. Encuentra la medida de $\angle CQG$.



9. La razón de las medidas de un par de ángulos adyacentes en una línea es $4 : 5$.
   a. Encuentra las medidas de los dos ángulos.
   b. Dibuja un diagrama a escala de estos ángulos adyacentes. Indica las medidas de cada ángulo.

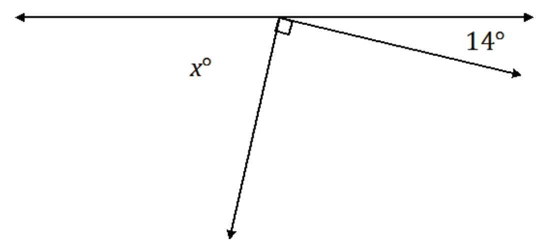
10. La razón de las medidas de tres ángulos adyacentes en una línea es $3 : 4 : 5$.
    a. Encuentra las medidas de los tres ángulos.
    b. Dibuja un diagrama a escala de estos ángulos adyacentes. Indica las medidas de cada ángulo.

Lección 11: Problemas de ángulos y resolución de ecuaciones

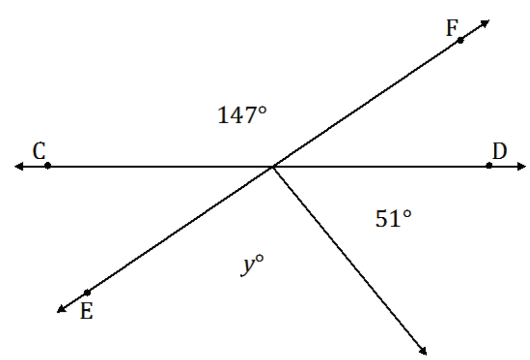
Trabajo en clase

Ejercicio inicial

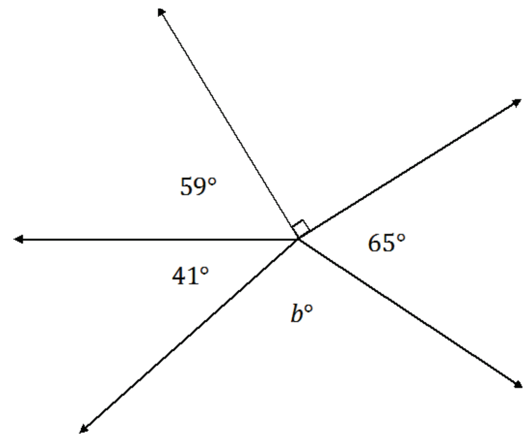
a. En un enunciado completo, describe la relación del ángulo en el diagrama. Escribe la ecuación de la relación del ángulo que se muestra en la figura y resuélvelo para x. Confirma tu respuesta midiendo el ángulo con un transportador.



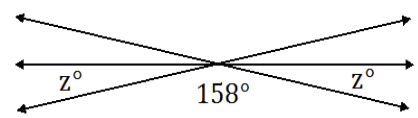
b. $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{EF}$ son líneas que intersecan. En un enunciado completo, describe la relación del ángulo en el diagrama. Escribe la ecuación de la relación del ángulo que se muestra en la figura y resuélvelo para y. Confirma tu respuesta midiendo el ángulo con un transportador.



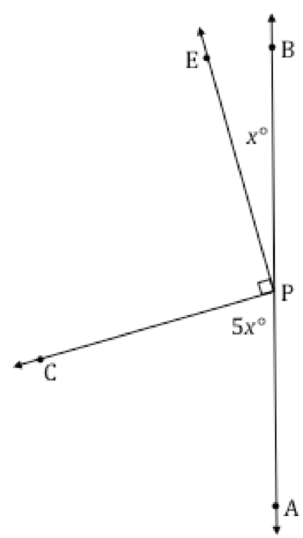
c. En un enunciado completo, describe la relación del ángulo en el diagrama. Escribe la ecuación de la relación del ángulo que se muestra en la figura y resuélvelo para b. Confirma tu respuesta midiendo el ángulo con un transportador.



d. La siguiente figura muestra tres líneas que se intersecan en un punto. En un enunciado completo, describe la relación del ángulo en el diagrama. Escribe la ecuación de la relación del ángulo que se muestra en la figura y resuélvelo para z. Confirma tu respuesta midiendo el ángulo con un transportador.

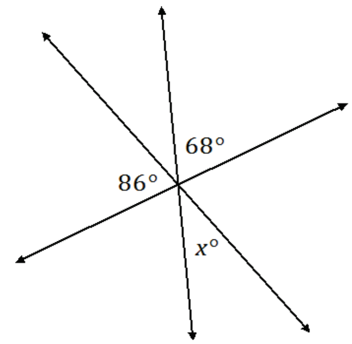


e. Escribe la ecuación de la relación del ángulo que se muestra en la figura y resuélvelo para x. En un enunciado completo, describe la relación del ángulo en el diagrama. Encuentra las medidas de $\angle EPB$ y $\angle CPA$. Confirma tus respuestas midiendo los ángulos con un transportador.



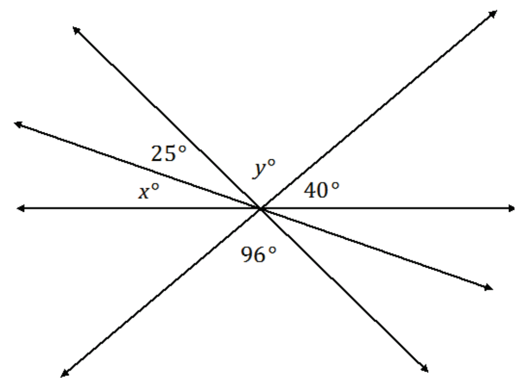
Ejemplo 1

La siguiente figura muestra tres líneas que se intersecan en un punto. En un enunciado completo, describe la relación del ángulo en el diagrama. Escribe la ecuación de la relación del ángulo que se muestra en la figura y resuélvelo para x. Confirma tu respuesta midiendo el ángulo con un transportador.



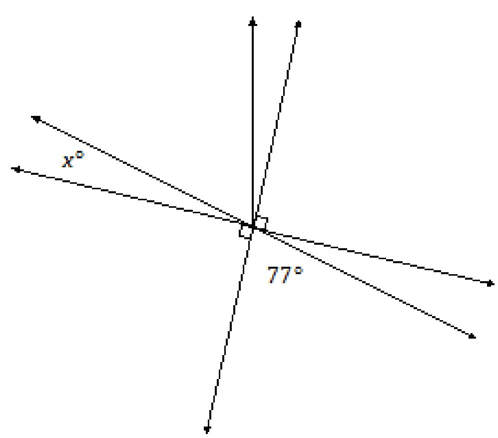
Ejercicio 1

La siguiente figura muestra cuatro líneas que se intersecan en un punto. En un enunciado completo, describe las relaciones del ángulo en el diagrama. Escribe la ecuación de la relación del ángulo que se muestra en la figura y resuélvelo para x y y. Confirma tus respuestas midiendo los ángulos con un transportador.



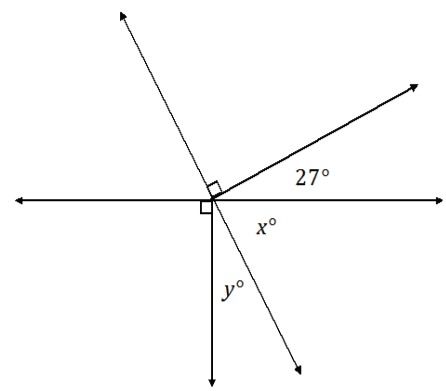
Ejemplo 2

En un enunciado completo, describe las relaciones del ángulo en el diagrama. Es posible poner nombre al diagrama para ayudar a describir las relaciones angulares. Escribe la ecuación de la relación del ángulo que se muestra en la figura y resuélvelo para x. Confirma tu respuesta midiendo el ángulo con un transportador.



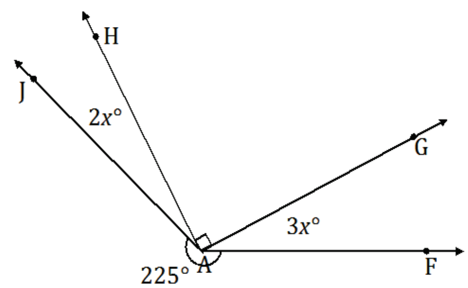
Ejercicio 2

En un enunciado completo, describe las relaciones del ángulo en el diagrama. Escribe la ecuación de la relación del ángulo que se muestra en la figura y resuélvelo para x y y. Confirma tus respuestas midiendo los ángulos con un transportador.



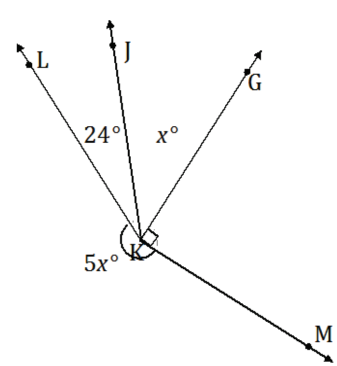
Ejemplo 3

En un enunciado completo, describe las relaciones del ángulo en el diagrama. Escribe la ecuación de la relación del ángulo que se muestra en la figura y resuélvelo para x. Encuentra las medidas de $\angle JAH$ y $\angle GAF$. Confirma tus respuestas midiendo los ángulos con un transportador.



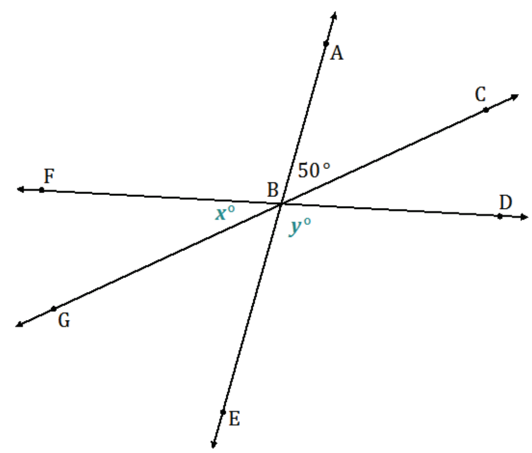
Ejercicio 3

En un enunciado completo, describe las relaciones del ángulo en el diagrama. Escribe la ecuación de la relación del ángulo que se muestra en la figura y resuélvelo para x. Encuentra la medida de $\angle JKG$.. Confirma tu respuesta midiendo el ángulo con un transportador.



Ejemplo 4

En el diagrama adjunto, la medida de $\angle DBE$ es cuatro veces la medida de $\angle FBG$.



a. Nombra $\angle DBE$ como $y°$ y $\angle FBG$ como $x°$. Escribe una ecuación que describe la relación entre $\angle DBE$ y $\angle FBG$.

b. Encuentra el valor de x.

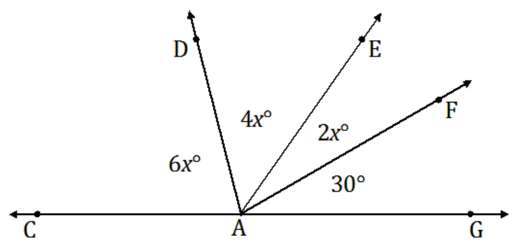
c. Encuentra las medidas de $\angle FBG$, $\angle CBD$, $\angle ABF$, $\angle GBE$, y $\angle DBE$.

d. ¿Cuál es la medida de $\angle ABG$? Identifica la relación del ángulo utilizado para obtener tu respuesta.

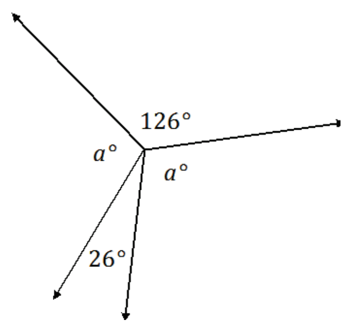
Grupo de problemas

En un enunciado completo, describe las relaciones del ángulo en cada diagrama. Escribe una ecuación para las relaciones del ángulo que se muestra en la figura y resuelve para el ángulo desconocido indicado. Puedes comprobar tus respuestas midiendo cada ángulo con un transportador.

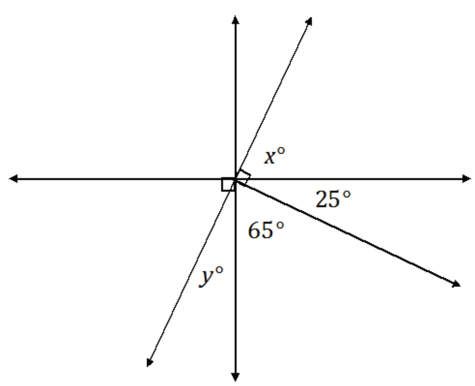
1. Encuentra las medidas de $\angle EAF$, $\angle DAE$ y $\angle CAD$.



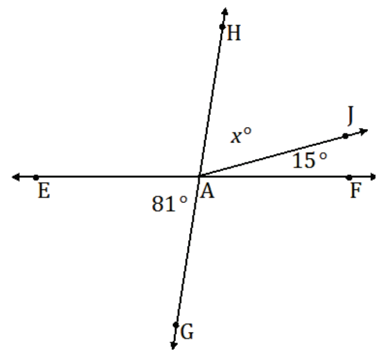
2. Encuentra la medida de a.



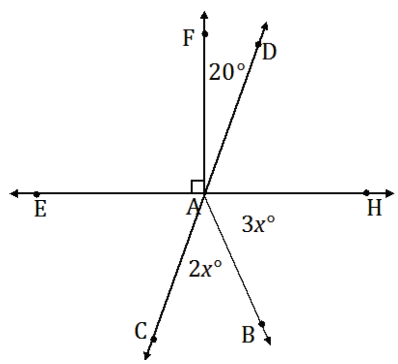
3. Encuentra las medidas de x y y.



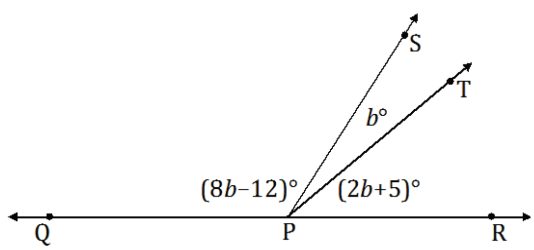
4. Encuentra la medida de $\angle HAJ$.



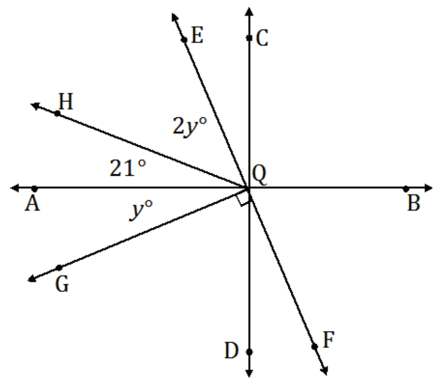
5. Encuentra las medidas de $\angle HAB$ y $\angle CAB$.



6. La medida de $\angle SPT$ es $b°$. La medida de $\angle TPR$ es cinco más que dos por $\angle SPT$. La medida de $\angle QPS$ es doce menos que ocho por la medida de $\angle SPT$. Encuentra las medidas de $\angle SPT$, $\angle TPR$ y $\angle QPS$.



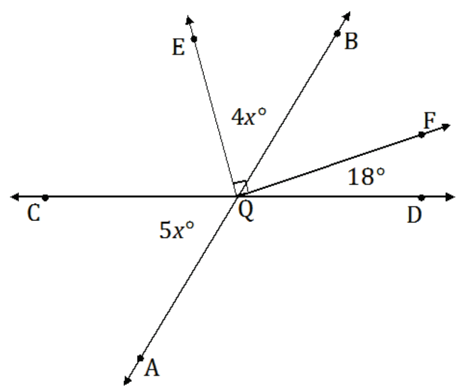
7. Encuentra las medidas de $\angle HQE$ y $\angle AQG$.



8. Las medidas de los tres ángulos en un punto tienen una razón de $2:3:5$. Encuentra las medidas de los ángulos.

9. La suma de las medidas de dos ángulos adyacentes es $72°$. La razón del ángulo más pequeño con el ángulo más grande es $1:3$. Encuentra la medida de cada ángulo.

10. Encuentra las medidas de $\angle CQA$ y $\angle EQB$.



Lección 12: Propiedades de las desigualdades

Trabajo en clase

Ejemplo 1

Conserva el símbolo de desigualdad:

Invierte el signo de desigualdad:

Estación 1:

Dado 1	Desigualdad	Dado 2	Operación	Nueva desigualdad	¿Signo de desigualdad conservado o invertido?
-3	$<$	5	Suma 2	$-3+2<5+2$ $-1<7$	Conservado
			Suma -3		
			Resta 2		
			Resta -1		
			Suma 1		

Analiza los resultados. Realiza una afirmación acerca de lo que observas y justifícalo con pruebas.

Estación 2:

Dado 1	Desigualdad	Dado 2	Operación	Nueva desigualdad	¿Signo de desigualdad conservado o invertido?
-3	$<$	4	Multiplica por -1	$(-1)(-3) < (-1)(4)$ $3 > -4$	Invertido
			Multiplica por -1		
			Multiplica por -1		
			Multiplica por -1		
			Multiplica por -1		

Analiza los resultados. Realiza una afirmación acerca de lo que observas y justifícalo con pruebas.

Estación 3:

Dado 1	Desigualdad	Dado 2	Operación	Nueva desigualdad	¿Signo de desigualdad conservado o invertido?
-2	$>$	-4	Multiplica por $\frac{1}{2}$	$(-2)\left(\frac{1}{2}\right) > (-4)\left(\frac{1}{2}\right)$ $-1 > -2$	Conservado
			Multiplica por 2		
			Divide entre 2		
			Divide entre $\frac{1}{2}$		
			Multiplica por 3		

Analiza los resultados. Realiza una afirmación acerca de lo que observas y justifícalo con pruebas.

Estación 4:

Dado 1	Desigualdad	Dado 2	Operación	Nueva desigualdad	¿Signo de desigualdad conservado o invertido?
3	$>$	-2	Multiplica por -2	$3(-2) > (-2)(-2)$ $-6 < 4$	Invertido
			Multiplica por -3		
			Divide entre -2		
			Divide entre $-\frac{1}{2}$		
			Multiplica por $-\frac{1}{2}$		

Analiza los resultados. Realiza una afirmación acerca de lo que observas y justifícalo con pruebas.

Ejercicio

Completa el siguiente cuadro utilizando la desigualdad dada y determina una operación en la que se conserva el signo de desigualdad y una operación en la que se invierte el signo de desigualdad. Explica por qué ocurre esto.

Desigualdad	**Operación y nueva desigualdad que conserva el signo de desigualdad**	**Operación y nueva desigualdad que invierte el signo de desigualdad**	**Explicación:**
$2 < 5$			
$-4 > -6$			
$-1 \leq 2$			
$-2 + (-3) < -3 - 1$			

Resumen de la lección

Cuando se suman o restan los dos lados de una desigualdad con un número, el signo de desigualdad sigue siendo el mismo y se dice que se ____________________.

Cuando se multiplican o dividen los dos lados de una desigualdad con un número positivo, el signo de desigualdad sigue siendo el mismo y se dice que se ____________________.

Cuando se multiplican o dividen los dos lados de una desigualdad con un número negativo, el signo de desigualdad cambia de $<$ a $>$ o de $>$ a $<$. El signo de desigualdad se ____________________.

Grupo de problemas

1. Para cada problema, utiliza las propiedades de las desigualdades para escribir una afirmación de desigualdad verdadera.
   Los dos números enteros son -2 y -5.
   a. Escribe una afirmación de desigualdad verdadera.
   b. Resta -2 de cada lado de la desigualdad. Escribe una afirmación de desigualdad verdadera.
   c. Multiplica cada número por -3. Escribe una afirmación de desigualdad verdadera.

2. En su reciente estancia en el Caribe, Kay y Tony querían explorar los lugares del océano. El primer día se fueron en un submarino 150 pies bajo el nivel del mar. El segundo día, fueron a bucear 75 pies bajo el nivel del mar.
   a. Escribe una desigualdad comparando la elevación del submarino y la elevación del buceo.
   b. Si solo pudieron ir a una quinta parte de las posibles elevaciones, escribe una nueva desigualdad para mostrar las elevaciones alcanzadas realmente.
   c. ¿El signo de desigualdad es conservado o invertido? Explica.

3. Si a es un entero negativo, entonces ¿cuál de los enunciados numéricos a continuación es verdadero? Si el enunciado numérico no es verdadero, da una razón.

   a. $5 + a < 5$
   b. $5 + a > 5$
   c. $5 - a > 5$
   d. $5 - a < 5$
   e. $5a < 5$
   f. $5a > 5$
   g. $5 + a > a$
   h. $5 + a < a$
   i. $5 - a > a$
   j. $5 - a < a$
   k. $5a > a$
   l. $5a < a$

Lección 13: Desigualdades

Trabajo en clase

Ejercicio inicial: Escribe las afirmaciones de desigualdad

Tarik está tratando de ahorrar $\$265.49$ para comprar una nueva tableta. En este momento, tiene $\$40$ y puede ahorrar $\$38$ por semana de su mesada.

Escribe y resuelve una expresión para representar la cantidad de dinero ahorrado después de...

2 semanas

3 semanas

4 semanas

5 semanas

6 semanas

7 semanas

8 semanas

¿Cuándo tendrá Tarik suficiente dinero para comprar la tableta?

Escribe una desigualdad que generalice el problema.

Ejemplo 1: Evaluar las desigualdades—encontrar una solución

La suma de dos números enteros impares consecutivos es más que -12. Escribe varias expresiones numéricas de desigualdades verdaderas.

La suma de dos números enteros impares consecutivos es más que -12. ¿Cuál es el valor menor que lo hará verdadero?

a. Escribe una desigualdad que se pueda utilizar para encontrar el valor menor que hará a la afirmación verdadera.

b. Utiliza pasos si-entonces para resolver la desigualdad escrita en la parte (a). Identifica dónde los 0s y 1s se forman usando los pasos si-entonces.

c. ¿Cuál es el valor menor que lo hará verdadero?

Ejercicios

1. Connor fue a la feria del condado con $\$22.50$ en su bolsillo. Compró un perro caliente y una bebida por $\$3.75$ y después quiso gastar el resto de su dinero en boletos para paseos, que cuestan $\$1.25$ cada uno.

   a. Escribe una desigualdad para representar el total de gastos, donde r es el número de boletos comprados.

   b. Connor quiere usar esta desigualdad para determinar si puede comprar 10 boletos. Utiliza la sustitución para mostrar si tendrá suficiente dinero.

   c. ¿Cuál es el número máximo total de entradas que se pueden comprar en base a la información proporcionada?

2. Escribe y resuelve una afirmación de desigualdad para representar el siguiente problema:

   En una aerolínea en particular, las maletas registradas no pueden pesar más de 50 libras. Sally guardó 32 libras de ropa y cinco regalos idénticos en una maleta que pesa 8 libras. Escribe una desigualdad para representar esta situación.

Grupo de problemas

1. Relaciona cada problema de desigualdad con su representación. Una opción se usa dos veces.

La suma de tres veces un número y -4 es mayor que 17.	a. $3x + -4 \geq 17$
La suma de tres veces un número y -4 es menos que 17.	b. $3x + -4 < 17$
La suma de tres veces un número y -4 es como máximo 17.	c. $3x + -4 > 17$
La suma de tres veces un número y -4 es no mayor que 17.	d. $3x + -4 \leq 17$
La suma de tres veces un número y -4 es por lo menos 17.	

2. Si x representa un número entero positivo, encuentra las soluciones a las siguientes desigualdades.

   a. $x < 7$
   b. $x - 15 < 20$
   c. $x + 3 \leq 15$
   d. $-x > 2$
   e. $10 - x > 2$
   f. $-x \geq 2$
   g. $\frac{x}{3} < 2$
   h. $-\frac{x}{3} > 2$
   i. $3 - \frac{x}{4} > 2$

3. Recordemos que el símbolo $\neq$ significa *no es igual a*. Si x representa un número entero positivo, indica si cada una de las siguientes afirmaciones es siempre verdadera, a veces verdadera o falsa.

   a. $x > 0$
   b. $x < 0$
   c. $x > -5$
   d. $x > 1$
   e. $x \geq 1$
   f. $x \neq 0$
   g. $x \neq -1$
   h. $x \neq 5$

4. De dos números enteros consecutivos, si se dobla el número menor y se suma el número entero mayor resulta al menos 25.

   Representa el problema con una desigualdad y determina cuál de los valores dados *7*, *8* y/o *9* son soluciones. Después, encuentra el número menor que hará que la desigualdad sea verdadera.

5.
   a. La longitud de la cerca de un lugar rectangular es 12 pies más que el ancho. Si el granjero Dan tiene 100 pies de cerca, escribe una desigualdad para encontrar las dimensiones del rectángulo con el perímetro mayor que se pueda crear usando 100 pies de cerca.
   b. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo con el mayor perímetro? ¿Cuál es el área encerrada por este rectángulo?

6. Como máximo, Kyle puede gastar $\$50$ en sándwiches y papas fritas para un picnic. Ya compró papas por $\$6$ y comprará sándwiches que costarán $\$4.50$ cada uno. Escribe y resuelve una desigualdad para mostrar la cantidad de sándwiches que puede comprar. Muestra tu trabajo e interpreta tu solución.

Lección 14: Resolución de desigualdades

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

El carnaval anual del Condado se llevará a cabo este verano y tendrá una duración de $5\frac{1}{2}$ días. Utiliza esta información y la otra información dada para responder a cada problema.

Eres dueño de la más grande y nueva montaña rusa llamada el Gigante amable. El costo para subir a la montaña rusa es $\$6$. El operador del paseo debe pagar $\$200$ por día por el alquiler y $\$65$ por día por la inspección de seguridad. Si desea obtener una ganancia de por lo menos $\$1,000$ cada día, ¿cuál es el número mínimo de personas que deben subir a la montaña rusa?

Escribe una desigualdad que se pueda usar para encontrar el número mínimo de personas, p, que deben subirse a la montaña rusa cada día para obtener la ganancia diaria.

Resuelve la desigualdad.

Interpreta la solución.

Ejemplo 1

Un campamento de verano para jóvenes hizo un presupuesto de $\$2{,}000$ para que los campistas asistan al carnaval. El costo de cada campista es de $\$17.95$, que incluye la entrada general al carnaval y dos comidas. El campamento de verano para jóvenes también debe pagar $\$250$ por los chaperones que asisten al carnaval y $\$350$ por el transporte hacia el carnaval y de regreso. ¿Cuál es el mayor número de campistas que pueden asistir al carnaval si el precio del campamento debe permanecer dentro de su presupuesto?

Ejemplo 2

El propietario del carnaval paga al propietario de una exposición de animales exóticos $\$650$ durante todo el tiempo que se muestra la exposición. El propietario de la exposición no tiene ningún otro gasto, excepto el costo del seguro al día. Si el propietario de la exhibición de animales quiere ganar más de $\$500$ en $5\frac{1}{2}$ días, ¿cuál es la tasa de seguro al día que puede darse el lujo de pagar?

Ejemplo 3

Varios vendedores en la venta del carnaval venden productos y anuncian sus negocios. Shane trabaja para una empresa que vende vehículos recreativos todo terreno, motocross, motos de nieve, motocicletas. Su jefe le paga $\$500$ para trabajar todos los días en el carnaval más 5% de comisión sobre todas las ventas realizadas en el carnaval. ¿Cuál fue la cantidad mínima de ventas que Shane realizó para ganar más de $\$1{,}500$?

Resumen de la lección

La clave para resolver las desigualdades es utilizar pasos si-entonces para formar 0s y 1s y obtener la desigualdad en la forma $x > c$ o $x < c$ donde c es un número. Sumar o restar opuestos formará 0s. De acuerdo con el paso si-entonces, cualquier número que se sume o se reste de cada lado de una desigualdad no cambia la solución de la desigualdad. Multiplicar y dividir números forma 1s. Cuando cada lado de una desigualdad se multiplica por o divide entre un número positivo, la señal de la desigualdad no se invierte. Sin embargo, cuando cada lado de una desigualdad se multiplica o divide entre un número negativo, la señal de la desigualdad se invierte.

Dadas las desigualdades que contienen decimales, las desigualdades equivalentes que sólo tienen coeficientes enteros y términos constantes pueden ser creadas al multiplicar cada término varias veces por diez hasta que todos los coeficientes y términos constantes sean números enteros.

Dadas las desigualdades que contienen fracciones, las desigualdades equivalentes que sólo tienen coeficientes enteros y términos constantes pueden ser creadas al multiplicar cada término por el mínimo común múltiplo de los valores en los denominadores.

Grupo de problemas

1. Como vendedor, a Jonathan se le paga $\$50$ por semana, más el 3% de la cantidad total que vende. Esta semana, quiere ganar por lo menos $\$100$. Escribe una desigualdad con coeficientes enteros de las ventas totales necesarias para ganar por lo menos $\$100$ y describe lo que representa la solución.

2. La presión arterial sistólica es el número más alto en la lectura de la presión arterial. Mide como el músculo del corazón se contrae. Heather estaba con su abuelo cuando le revisaron su presión arterial. La enfermera le dijo que el límite superior de su presión arterial sistólica es igual a la mitad de su edad incrementada en 110.
   a. a es la edad en años y p es la presión arterial sistólica en milímetros de mercurio (mmHg). Escribe una desigualdad para representar esta situación.
   b. El abuelo de Heather tiene 76 años. ¿Cuál es su presión arterial sistólica *normal*?

3. Traci recoge las donaciones para un maratón de baile. Un grupo de patrocinadores donará un total de $\$6$ por cada hora que baile. Otro grupo de patrocinadores donará $\$75$ no importando cuánto tiempo baile. ¿Cuántas horas, al minuto más cercano, debe bailar Traci si quiere recaudar por lo menos $\$1{,}000$?

4. La edad de Jack es tres años más que el doble de la edad de su hermano menor, Jimmy. Si la suma de sus edades es al menos 18, encuentra la edad máxima que Jimmy podría tener.

5. Brenda tiene $\$500$ en su cuenta bancaria. Cada semana retira $\$40$ para diversos gastos. ¿Cuántas semanas puede retirar dinero si quiere mantener el balance de por lo menos $\$200$?

6. Un patín viaja 10 millas por hora más rápido que una bicicleta eléctrica. El patín viajó durante 3 horas y la bicicleta viajó durante $5\frac{1}{2}$ horas. En total, el patín y la bicicleta viajaron no más de 285 millas. Encuentra la velocidad máxima de cada uno.

Lección 15: Representación gráfica de las soluciones y desigualdades

Trabajo en clase

Ejercicio 1

1. Dos autos idénticos tienen que caber en un pequeño garaje. La apertura es de 23 pies y 6 pulgadas de ancho y tiene que haber por lo menos 3 pies 6 pulgadas de espacio entre los coches y entre los bordes del garaje. ¿Qué tan anchos pueden ser los coches?

Ejemplo

Un concesionario de automóviles local está tratando de vender la totalidad de los coches que están en el lote. En la actualidad, hay 525 coches en el lote y el gerente general estima que se van a vender 50 coches constantemente por semana. Calcula el número de semanas que tomará disminuir el número de coches a menos de 75.

Escribe una desigualdad que se pueda usar para encontrar el número de semanas completas, w, que tomará disminuir el número de coches a menos de 75. Dado que w es el número completo o semanas completas, $w = 1$ significa el final de la semana 1.

Resuelve y grafica la desigualdad.

Interpreta la solución en el contexto del problema.

Comprueba la solución.

Ejercicio 2

2. El costo del alquiler de un coche es $\$25$ por día más una cuota única de $\$75.50$ por el seguro. ¿Cuántos días puede ser alquilado el coche si el costo total no puede ser mayor que $\$525$?
   a. Escribe una desigualdad para representar esta situación.

   b. Resuelve y grafica la desigualdad.

   c. Interpreta la solución en el contexto del problema.

Ejercicios adicionales

Para cada problema, escribe, resuelve y grafica la desigualdad, e interpreta la solución dentro del contexto del problema.

3. La Sra. Smith decide comprar tres suéteres y un par de pantalones. Tiene $\$120$ en su cartera. Si el precio de los pantalones es $\$35$, ¿cuál es el precio más alto posible de un suéter, si cada suéter es del mismo precio?

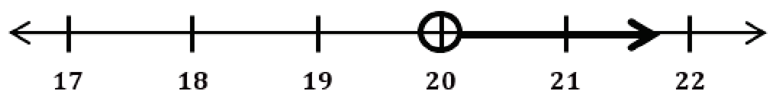
4. Los miembros del Coro Selecto están de acuerdo para comprar al menos 250 entradas para un concierto al aire libre. Compran 20 entradas menos para el césped que para el balcón. ¿Cuál es el menor número de boletos para el balcón?

5. Samuel necesita $29 para descargar algunas canciones y películas en su reproductor de MP3. Su madre se compromete a pagarle $6 por hora por recoger las hojas, además de su mesada semanal de $5. ¿Cuál es el número mínimo de horas que Samuel debe trabajar en una semana para tener suficiente dinero para comprar las canciones y las películas?

Grupo de problemas

1. Ben ha aceptado jugar menos videojuegos y pasar más tiempo estudiando. Ha aceptado jugar menos de 10 horas de videojuegos cada semana. De lunes a jueves, juega videojuegos un total de $5\frac{1}{2}$ horas. En los 3 días restantes, juega videojuegos en la misma cantidad de tiempo cada día. Encuentra t, la cantidad de tiempo que juega videojuegos para cada uno de los 3 días. Grafica tu solución.

2. El contrato de Gary afirma que debe trabajar más de 20 horas por semana. La siguiente gráfica representa el número de horas que puede trabajar en una semana.

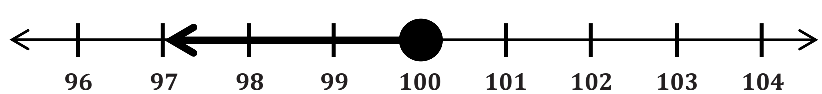


   a. Escribe una desigualdad algebraica que represente el número de horas, h, que Gary puede trabajar en una semana.
   b. Se le paga a Gary $\$15.50$ por hora adicional a su sueldo semanal de $\$50$. Esta semana quiere ganar más de $\$400$. Escribe una desigualdad para representar esta situación.
   c. Resuelve y representa gráficamente la solución de la parte (b). Redondea a la hora más cercana.

3. La cuenta bancaria de Sally tiene $\$650$. Cada semana, Sally retira $\$50$ para pagar a la cuidadora de su perro. ¿Cuál es el número máximo de semanas que Sally puede retirar dinero para que quede al menos $\$75$ en la cuenta? Escribe y resuelve una desigualdad para encontrar la solución y grafica la solución en una recta numérica.

4. En un crucero, hay dos opciones para una conexión a Internet. La primera opción es una cuota de $\$5$ más un adicional de $\$0.25$ por minuto. La segunda opción cuesta $\$50$ por un número ilimitado de minutos. ¿Por cuántos minutos, m, la primera opción, es más barata que la segunda opción? Representa gráficamente la solución.

5. La longitud de un rectángulo es 100 centímetros y su perímetro es mayor que 400 centímetros. Henry escribe una desigualdad y representa gráficamente la solución a continuación para encontrar el ancho del rectángulo. ¿Tiene razón? En caso afirmativo, escribe y resuelve la desigualdad para representar el problema y la gráfica. Si no, explica los errores que Henry cometió.

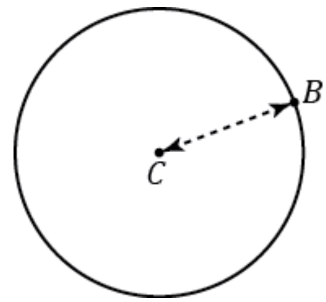


Lección 16: La razón más famosa de todas

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

a. Usando un compás, dibuja un círculo como la imagen a la derecha.



C es el *centro* del círculo.
La distancia entre C y B es el *radio* del círculo.

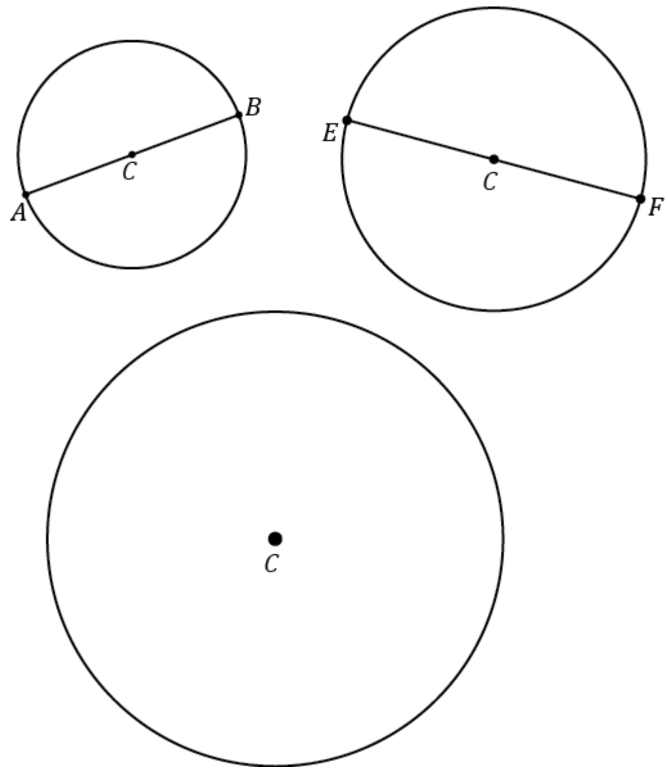
b. Escribe tu propia definición para el término *círculo*.

c. Extiende el segmento CB al segmento AB en la parte (a), donde A es también un punto en el círculo.

La longitud del segmento AB se denomina diámetro del círculo.

d. El diámetro es el ________________________ de largo que el radio.

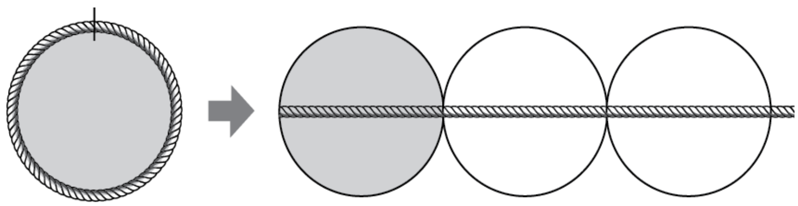
e. Mide el radio y el diámetro de cada círculo. El centro de cada círculo está marcado con una C.



f. Dibuja un círculo del radio 6 cm.

Ejercicio de representación matemática

La razón entre la circunferencia y su diámetro es siempre la misma en cualquier círculo. El valor de esta razón, $\frac{\text{Circunferencia}}{\text{Diámetro}}$, se llama el número *pi* y está representado por el símbolo π.

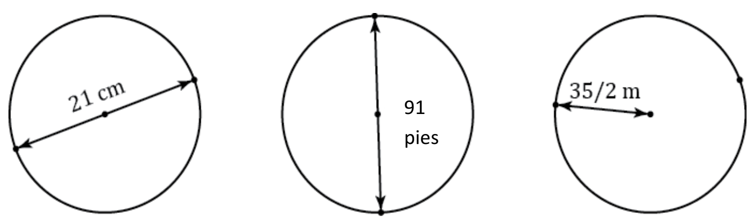


Dado que la circunferencia es un poco mayor que 3 veces el diámetro, π es un número que es un poco mayor que 3. Usa el símbolo π para representar este número especial. Pi es un decimal periódico que nunca termina, y los matemáticos usan el símbolo π o representaciones aproximadas como la forma más conveniente para representar pi.

- $\pi \approx 3.14$ o $\frac{22}{7}$.
- Las proporciones de la circunferencia del diámetro y $\pi : 1$ son iguales.
- $\text{Circunferencia de un círculo } = \pi \text{ x Diámetro}$.

Ejemplo

a. Los siguientes círculos no están dibujados a escala. Encuentra la circunferencia de cada círculo. (Usa $\frac{22}{7}$ como una aproximación de π).



b. El radio de un plato de papel es 11.7 cm. Encuentra la circunferencia a la décima más cercana. (Usa 3.14 como una aproximación de π).

c. El radio de un plato de papel es 11.7 cm. Encuentra la circunferencia a la centésima más cercana. (Utiliza el botón π de la calculadora como una aproximación de π).

d. Un círculo tiene un radio de r cm y una circunferencia de C cm. Escribe una fórmula que expresa el valor de C en términos de r y π.

e. La figura a continuación se encuentra en la forma de un semicírculo. Un semicírculo es un arco que es la mitad de un círculo. Encuentra el perímetro de la forma. (Usa 3.14 para π).

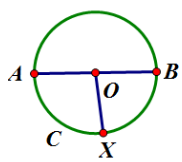
Vocabulario relevante

CIRCULO: Dado un punto O en el plano y un número $r > 0$, el *círculo con centro O y el radio r* es el conjunto de todos los puntos en el plano cuya distancia desde el punto O es igual a r.

RADIO DE UN CÍRCULO: El *radio* es la longitud de cualquier segmento cuyos extremos son el centro de un círculo y un punto que se encuentra en el círculo.

DIÁMETRO DE UN CÍRCULO: El *diámetro de un círculo* es la longitud de cualquier segmento que pasa por el centro de un círculo cuyos extremos están situados en el círculo. Si r es el *radio* de un círculo, entonces el diámetro es $2r$.

La palabra *diámetro* también puede significar el segmento. El contexto determina cómo se está utilizando el término: *El diámetro* por lo general se refiere a la longitud del segmento, mientras que un *diámetro* por lo general se refiere a un segmento. Del mismo modo, un radio puede hacer referencia a un segmento desde el centro de un círculo a un punto en el círculo.

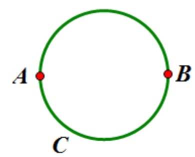


Círculo C

Radios: $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OX}$

Diámetro: $\overline{AB}$

Circunferencia

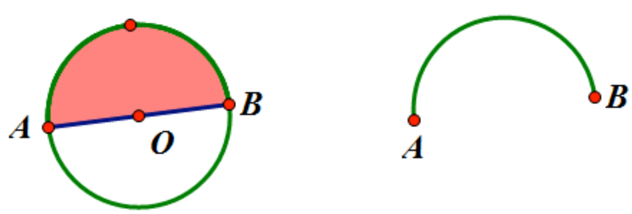


CIRCUNFERENCIA: La circunferencia de un círculo es la distancia alrededor de un círculo.

PI: El número *pi*, denotado por π, es el valor de la razón dada por la circunferencia y el diámetro, que es $p = \frac{\text{circunferencia}}{\text{diámetro}}$. Las aproximaciones más comúnmente utilizada para π es 3.14 o $\frac{22}{7}$

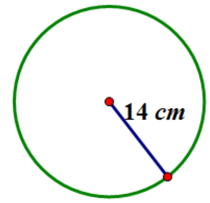
SEMICÍRCULO: Sea C un círculo con centro O, y sean A y B los puntos extremos de un diámetro. Un *semicírculo* es el conjunto que contiene A, B y todos los puntos que se encuentran en un semiplano determinado por $\overline{AB}$ (diámetro) que se encuentran en el círculo C.

Semicírculo

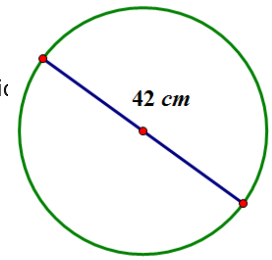


Grupo de problemas

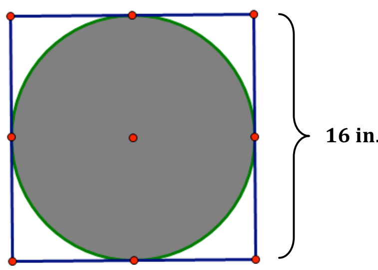
1. Encuentra la circunferencia.
   a. Da una respuesta exacta en términos de π.
   b. Utiliza $\pi \approx \frac{22}{7}$, y expresa tu respuesta como una fracción en su mínima expresión.
   c. Utiliza el botón $el\ \pi$ de la calculadora y expresa tu respuesta a la centésima más cercana.



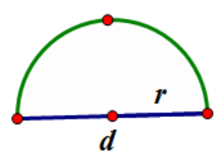
2. Encuentra la circunferencia.
   a. Da una respuesta exacta en términos de π.
   b. Utiliza $\pi \approx \frac{22}{7}$, y expresa tu respuesta como una fracción en su mínima expresi



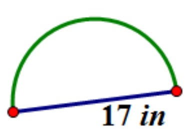
3. La figura muestra un círculo dentro de un cuadrado. Encuentra la circunferencia del círculo. Sea $\pi \approx 3.14$.



4. Considera el diagrama del semicírculo que se muestra.
   a. Explica con palabras cómo determinar el perímetro de un semicírculo.
   b. Usando d para representar el diámetro del círculo, escribe una ecuación algebraica que dé el perímetro de un semicírculo.
   c. Escribe otra ecuación algebraica para representar el perímetro de un semicírculo utilizando r para representar el radio de un semicírculo.

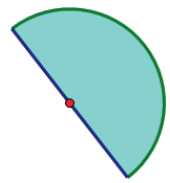


5. Encuentra el perímetro del semicírculo. Considera que $\pi \approx 3.14$.

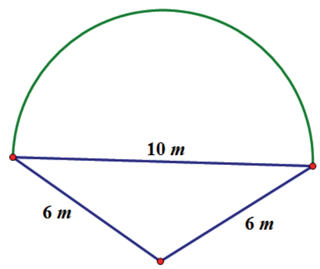


6. El negocio de jardinería de Ken corta el césped de forma irregular que incluye semicírculos. Encuentra la longitud del material del borde necesario para bordear los dos diseños de césped. Usa 3.14 para π.

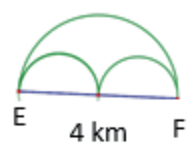
   a. El radio de este lecho de flores es 2.5 m.



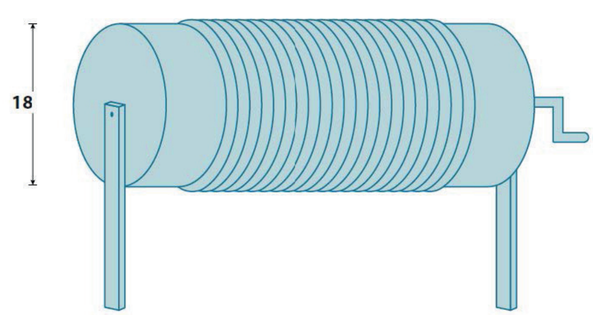
   b. El diámetro de la sección semicircular es 10 m, y las longitudes de los dos lados son 6 m.



7. María y Margaret están buscando en un mapa de un camino para correr en un parque local. ¿Cuál es la ruta más corta de E a F, a lo largo de los dos semicírculos o a lo largo del semicírculo más grande? Si una ruta es más corta, ¿cuánto más corta? Sea $\pi \approx 3.14$.



8. Alex el electricista necesita 34 yardas de cable eléctrico para completar un trabajo. Tiene una bobina de cable en su taller. El cable enrollado es 18 pulgadas de diámetro y se compone de 21 círculos de cable. ¿Será esta bobina suficiente para completar el trabajo? Sea $\pi \approx 3.14$.



Lección 17: El área de un círculo

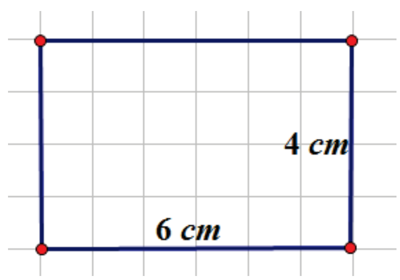
Trabajo en clase

Ejercicios 1–3

Resuelve el problema a continuación individualmente. Explica tu solución.

1. Encuentra el radio de un círculo si su circunferencia es 37.68 pulgadas. Utiliza $\pi \approx 3.14$.

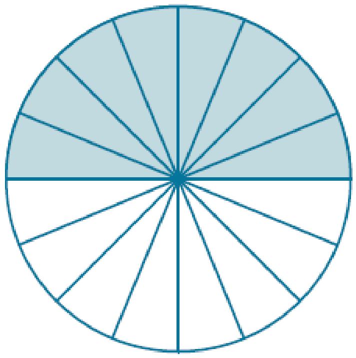
2. Determina el área del rectángulo a continuación. Nombra dos maneras que se pueden utilizar para encontrar el área del rectángulo.



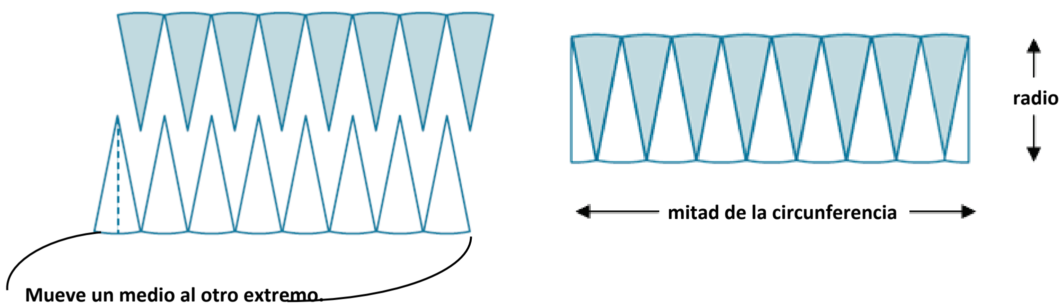
3. Encuentra la longitud de un rectángulo si el área es 27 cm^2 y el ancho es 3 cm.

Desafío exploratorio

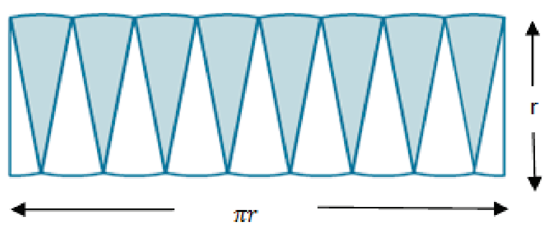
Para encontrar la fórmula del área de un círculo, corta el círculo en 16 piezas iguales.



Organiza las cuñas triangulares alternando las direcciones del "triángulo" y deslizándolas al mismo tiempo para hacer un "paralelogramo". Corta el triángulo del lado izquierdo a la mitad o por la línea dada y pon la mitad exterior del triángulo hasta el otro extremo del paralelogramo con el fin de crear un "rectángulo" aproximadamente.



La circunferencia es $2\pi r$, donde el radio es r. Por lo tanto, la mitad de la circunferencia es πr.



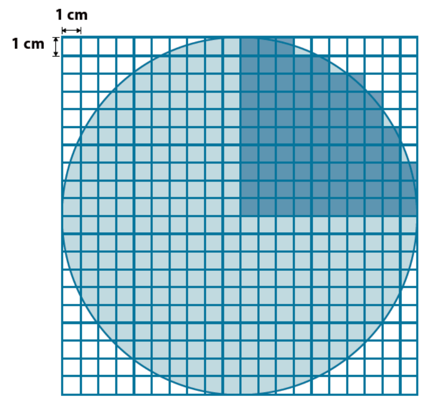
¿Cuál es el área del "rectángulo" usando las longitudes de los lados de arriba?

¿Las áreas del "rectángulo" y el círculo son iguales?

Si el área de la forma rectangular y el círculo son las mismas, ¿cuál es el área del círculo?

Ejemplo 1

Utiliza las unidades sombreadas de centímetros cuadrados para aproximar el área del círculo.



¿Cuál es el radio del círculo?

¿Qué método sería más rápido para determinar el área del círculo aparte de contar todos los cuadrados en el círculo?

Usando el diagrama, ¿cuántos cuadrados se utilizaron para cubrir una cuarta parte del círculo?

¿Cuál es el área de todo el círculo?

Ejemplo 2

Un aspersor gira en un patrón circular y rocía agua sobre una distancia de 12 pies. ¿Cuál es el área de la región circular cubierta por el aspersor? Expresa la respuesta al pie cuadrado más cercano.

Dibuja un diagrama para ayudarte a resolver el problema. ¿Qué representa la distancia de 12 pies en este problema?

¿Qué información se necesita para resolver el problema?

Ejemplo 3

Suzanne está haciendo una mesa circular de una pieza cuadrada de madera. El radio del círculo que está cortando es de 3 pies. ¿Cuánto desperdiciará en este proyecto? Expresa la respuesta al pie cuadrado más cercano.

Dibuja un diagrama para ayudarte a resolver el problema. ¿Qué representa la distancia de 3 pies en este problema?

¿Qué información se necesita para resolver el problema?

¿Qué información necesitamos para determinar el área del cuadrado y del círculo?

¿Cómo vamos a determinar los residuos?

¿Tu solución responde el problema planteado?

Ejercicios 4–6

4. Un círculo tiene un radio de 2 cm.
   a. Encuentra el área exacta de la región circular.

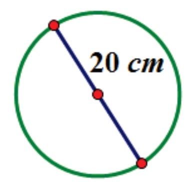
   b. Encuentra el área aproximada usando 3.14 para aproximar π.

5. Un círculo tiene un radio de 7 cm.
   a. Encuentra el área exacta de la región circular.

b. Encuentra el área aproximada usando $\frac{22}{7}$ para aproximar π.

c. ¿Cuál es la circunferencia del círculo?

6. Joan determinó que el área del círculo a continuación es $400\pi\ \mathrm{cm}^2$. Melinda dice que la solución de Joan es incorrecta; ella cree que el área es $100\pi\ \mathrm{cm}^2$. ¿Quién tiene la razón y por qué?



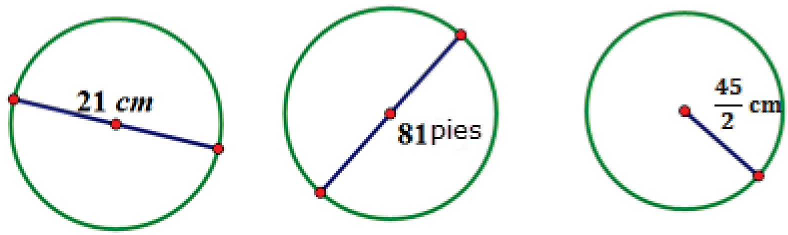
Vocabulario relevante

REGIÓN CIRCULAR (O DISCO): Dado un punto C en el plano y un número $r > 0$, la *región circular (o disco) con centro* C *y radio* r es el conjunto de todos los puntos en el plano cuya distancia desde el punto C es menor que o igual a r.

El límite de un disco es un círculo. El *área de un círculo* se refiere al área del disco definida por el círculo.

Grupo de problemas

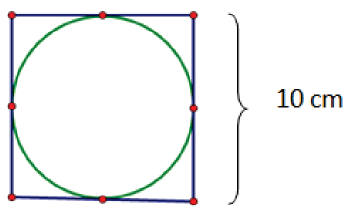
1. Los siguientes círculos no están dibujados a escala. Encuentra el área de cada círculo. (Usa $\frac{22}{7}$ como una aproximación de π.).



2. Un círculo tiene un diámetro de 20 pulgadas.
   a. Encuentra el área exacta y encuentra un área aproximada utilizando $\pi \approx 3.14$.
   b. ¿Cuál es la circunferencia del círculo usando $\pi \approx 3.14$?

3. Un círculo tiene un diámetro de 11 pulgadas.
   a. Encuentra el área exacta y una superficie aproximada utilizando $\pi \approx 3.14$.
   b. ¿Cuál es la circunferencia del círculo usando $\pi \approx 3.14$?

4. Usando la figura de abajo, encuentra el área del círculo.



5. Un camino circular delimita un césped en un parque. Si el borde interno de la trayectoria es 132 pies alrededor, aproxima la cantidad de área del césped dentro de la trayectoria circular. Utiliza $\pi \approx \frac{22}{7}$.

6. El área de un círculo es $36\pi\ \text{cm}^2$. Encuentra su circunferencia.

7. Encuentra la razón del área de dos círculos con radios 3 cm y 4 cm.

8. Si un círculo tiene un diámetro de 10 cm y un segundo círculo tiene un diámetro de 20 cm, ¿cuál es la razón entre el área del círculo más grande con el área del círculo más pequeño?

9. Describe un rectángulo cuyo perímetro es 132 ft y cuya área es menor que $1\ \text{ft}^2$. ¿Es posible encontrar un círculo cuya circunferencia sea 132 ft y cuya área sea menor que $1\ \text{ft}^2$? Si no es así, da un ejemplo o escribe un enunciado que explica por qué no existe tal círculo.

10. Si el diámetro de un círculo es el doble del diámetro de un segundo círculo, ¿cuál es la razón entre el área del primer círculo con el área del segundo?

Lección 18: Más problemas de área y circunferencia

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

Dibuja un círculo con un diámetro de 12 cm y un cuadrado con una longitud lateral de 12 cm en la hoja cuadriculada. Determina el área del cuadrado y del círculo.

Haz una lluvia de ideas sobre algunos métodos para encontrar la mitad del área del cuadrado y la mitad del área del círculo.

Calcula el área de la mitad del cuadrado y la mitad del círculo y explica a un compañero cómo llegaste al área.

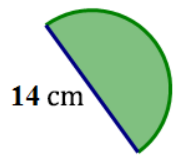
¿Cuál es la razón de la nueva área de la superficie original del cuadrado y del círculo?

Calcula el área de un cuarto de cuadrado y un cuarto de círculo, primero doblando y después por otro método. ¿Cuál es la razón de la nueva área de la superficie original del cuadrado y del círculo?

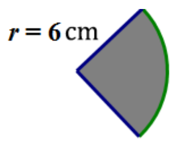
Escribe una expresión algebraica que expresa el área de un semicírculo y el área de un cuarto de círculo.

Ejemplo 1

Encuentra el área del siguiente semicírculo. Utiliza $\pi \approx \frac{22}{7}$.



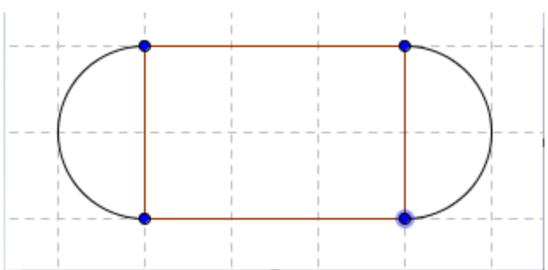
¿Cuál es el área del cuarto de círculo? Utiliza $\pi \approx \frac{22}{7}$.



Ejemplo 2

Marjorie está diseñando un nuevo conjunto de manteles para su mesa del comedor. Hizo un dibujo del mantel en papel cuadriculado. El diagrama representa el área del mantel que consiste en un rectángulo y dos semicírculos en cada extremo. Cada cuadrado de la cuadricula mide 4 pulgadas de largo.

Encuentra el área de todo el mantel. Explica tu forma de pensar con respecto a la solución de este problema.



Si Marjorie quiere hacer seis manteles, ¿cuántas pulgadas cuadradas de tela necesitará? Supongamos que no hay residuos.

Marjorie decide que quiere coser una tira de un material contrastante alrededor del borde de los manteles. ¿Cuánta cantidad de material para la tira necesitará Marjorie?

Ejemplo 3

La circunferencia de un círculo es 24π cm. ¿Cuál es el área exacta del círculo?

Dibuja un diagrama para ayudarte a resolver el problema.

¿Qué información se necesita para resolver el problema?

Después, encuentra el área.

Ejercicios

1. Encuentra el área de un círculo con un diámetro de 42 cm. Utiliza $\pi \approx \frac{22}{7}$.

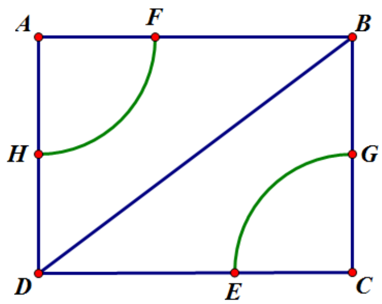
2. La circunferencia de un círculo es 9π cm.
   a. ¿Cuál es el diámetro?

   b. ¿Cuál es el radio?

   c. ¿Cuál es el área?

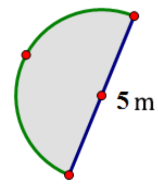
3. Si los estudiantes solo conocen el radio de un círculo, ¿qué otras medidas podrían determinar? Explica cómo los estudiantes utilizarían el área para encontrar las otras partes.

4. Encuentra el área en el rectángulo entre los dos cuartos del círculo, si $AF = 7$ ft, $FB = 9$ ft y $HD = 7$ ft. Utiliza $\pi \approx \frac{22}{7}$. Cada cuarto de círculo en las esquinas superior izquierda e inferior derecha tiene el mismo radio.



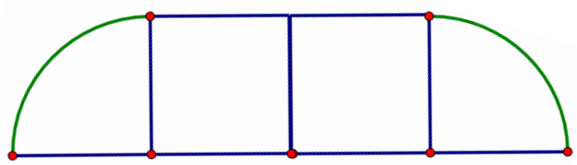
Grupo de problemas

1. Marco creó un lecho de flores que es de forma semicircular, como se muestra en la imagen. El diámetro del lecho de flores es 5 m.
   a. ¿Cuál es el perímetro del lecho de flores? (Aproxima π a 3.14).
   b. ¿Cuál es el área del lecho de flores? (Aproxima π a 3.14).

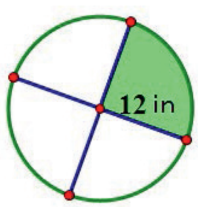


2. Un diseñador de jardines quiere incluir un patio semicircular en el extremo de una caja de arena cuadrada. Sabe que el área del patio semicircular es 25.12 cm^2.
   a. Haz un dibujo para representar esta situación.
   b. ¿Cuál es la longitud del lado del cuadrado?

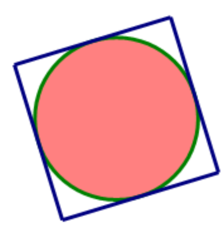
3. Un fabricante de ventanas diseñó un conjunto de ventanas para la parte superior de una pared de dos pisos. Si la ventana está compuesta de 2 cuadrados y 2cuartos de círculo en cada extremo, y si la longitud del vano de las ventanas en la parte inferior es de 12 pies, ¿aproximadamente cuánto vidrio será necesario para completar el conjunto de ventanas?



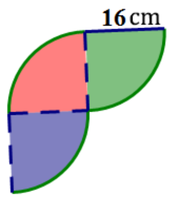
4. Encuentra el área de la región sombreada. (Aproxima π a $\frac{22}{7}$).



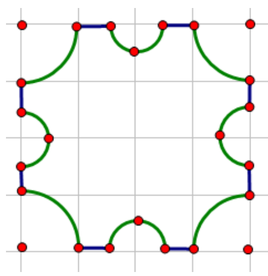
5. La siguiente figura muestra un círculo dentro de un cuadrado. Si el radio del círculo es 8 cm, encuentra lo siguiente y explica tu solución.
   a. La circunferencia del círculo
   b. El área del círculo
   c. El área del cuadrado



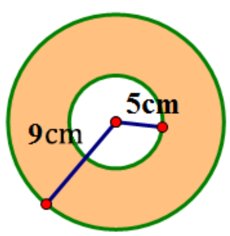
6. Miguel quiere crear un patrón de mosaico de tres cuartos de círculo para la pared posterior de su cocina. Repetirá los tres cuartos de círculo en todo el patrón. Encuentra el área del patrón de mosaico que utilizará Miguel. Aproxima π como 3.14.



7. Una tienda de máquinas tiene una placa metálica cuadrada con lados que miden 4 cm cada uno. Un maquinista debe cortar cuatro semicírculos con un radio de $\frac{1}{2}$ cm, y cuatro cuartos de círculo con un radio de 1 cm a partir de sus lados y las esquinas. ¿Cuál es el área de la placa formada? Utiliza $\frac{22}{7}$ para aproximar π.



8. Un artista gráfico está diseñando un logotipo de una empresa con dos círculos concéntricos (dos círculos que comparten el mismo centro, pero que tienen diferentes radios). El artista necesita conocer el área de la tira sombreada entre los dos círculos concéntricos. Explica al artista cómo encontraría el área de la región sombreada.



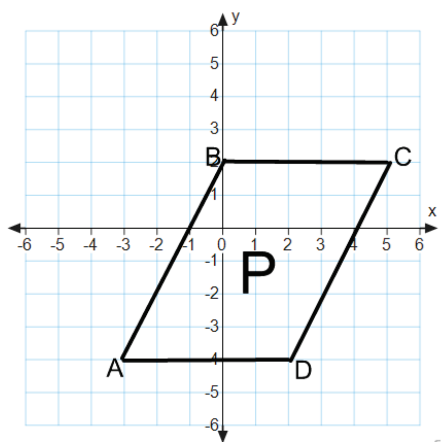
9. Crea tu propia forma compuesta de rectángulos, cuadrados, círculos o semicírculos y determina el área y el perímetro.

Lección 19: Problemas de área con una incógnita en el plano cartesiano

Trabajo en clase

Ejemplo: Área de un paralelogramo

El plano cartesiano siguiente contiene la figura P, paralelogramo $ABCD$.



a. Escribe los pares ordenados de cada uno de los vértices al lado de los puntos del vértice.

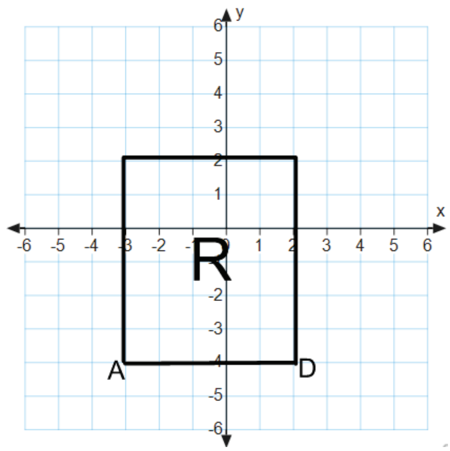
b. Dibuja un rectángulo alrededor de la figura P que tiene los puntos del vértice A y C. Marca los dos triángulos en la figura como S y T.

c. Encuentra el área del rectángulo.

d. Encuentra el área de cada triángulo.

e. Utiliza estas áreas para encontrar el área del paralelogramo $ABCD$.

El plano cartesiano a continuación contiene la figura R, un rectángulo con la misma base que el paralelogramo anterior.



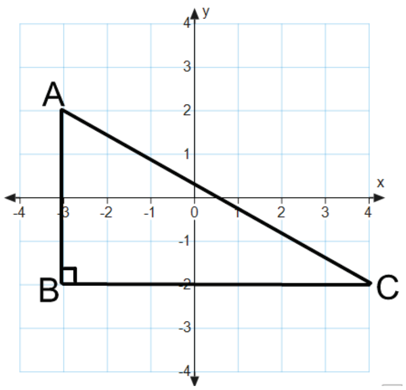
f. Dibuja los triángulos S y T y conecta la figura R de manera que se cree un rectángulo del mismo tamaño que el rectángulo que creaste en el primer plano cartesiano.

g. Encuentra el área del rectángulo R.

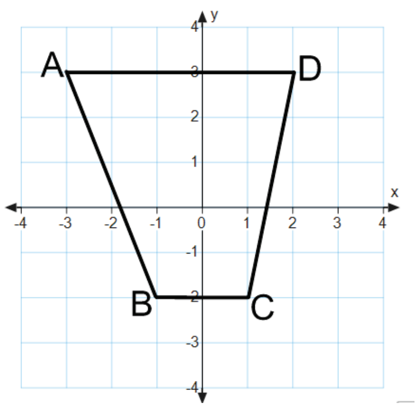
h. ¿Qué tienen en común las figuras R y P ?

Ejercicios

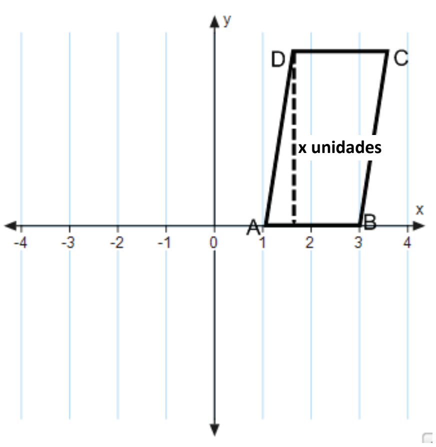
1. Encuentra el área del triángulo ABC.



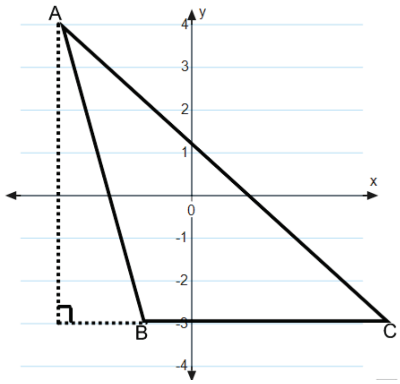
2. Encuentra el área de cuadrilátero $ABCD$ de dos maneras diferentes.



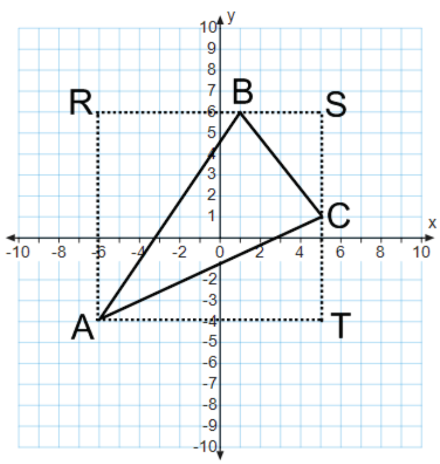
3. El área del cuadrilátero $ABCD$ es 12 unidades cuadradas. Encuentra x.



4. El área del triángulo ABC es 14 unidades cuadradas. Encuentra la longitud lateral $\overline{BC}$.



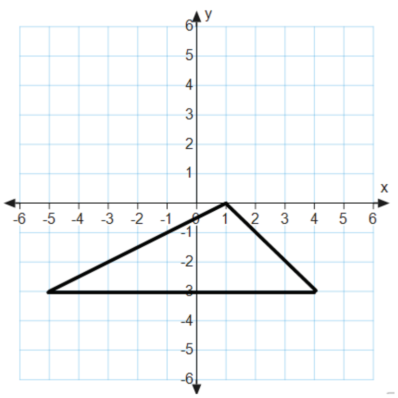
5. Encuentra el área del triángulo ABC.



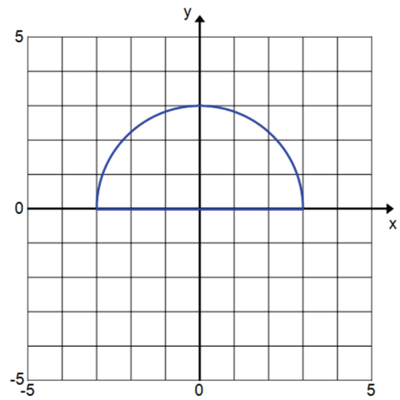
Grupo de problemas

Encuentra el área de cada figura.

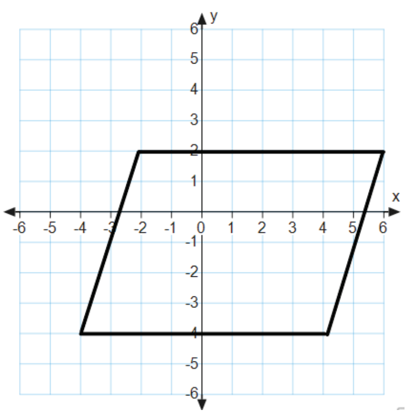
1.



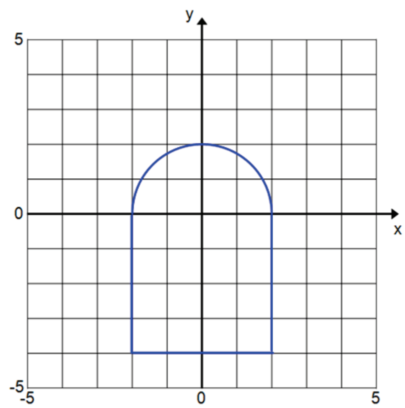
2.



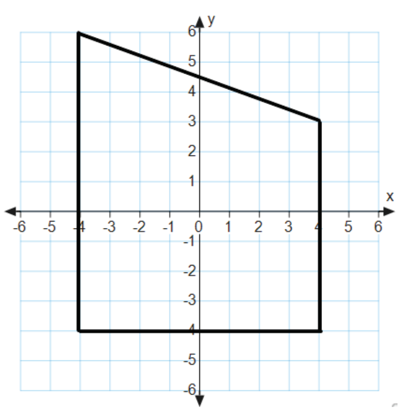
3.



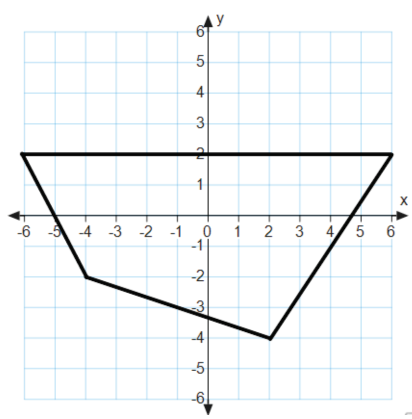
4.



5.

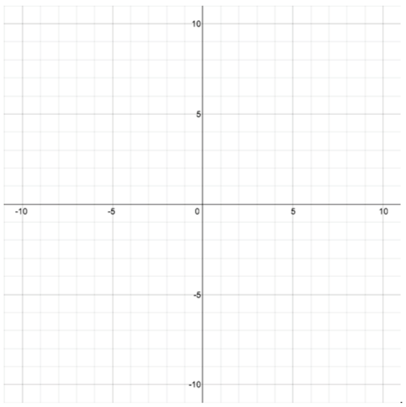


6.

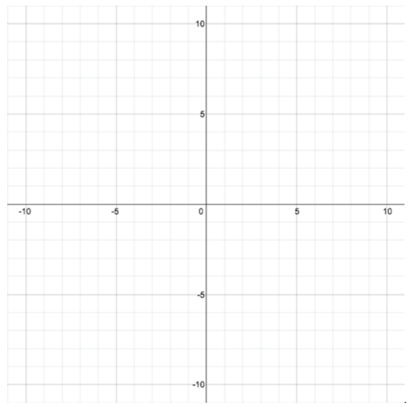


Para los problemas 7-9, dibuja una figura en el plano de coordenadas que coincida con cada descripción.

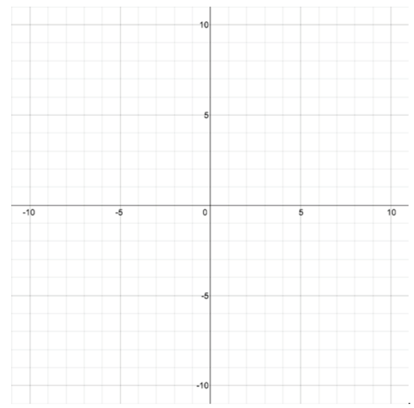
7. Un rectángulo con un área de 18 unidades cuadradas.



8. Un paralelogramo con un área de 50 unidades cuadradas.

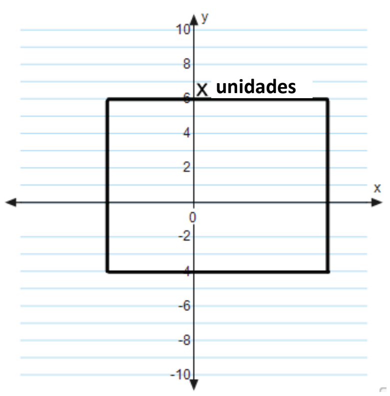


9. Un triángulo con un área de 25 unidades cuadradas.

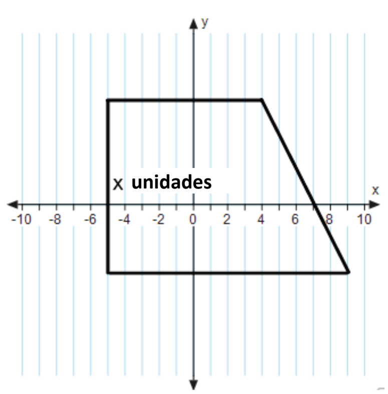


Encuentra el valor desconocido marcado como x en cada figura.

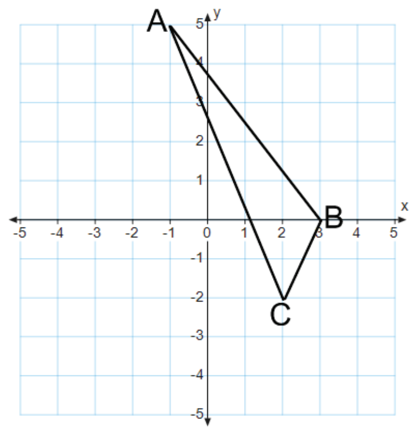
10. El rectángulo tiene un área de 80 unidades cuadradas.



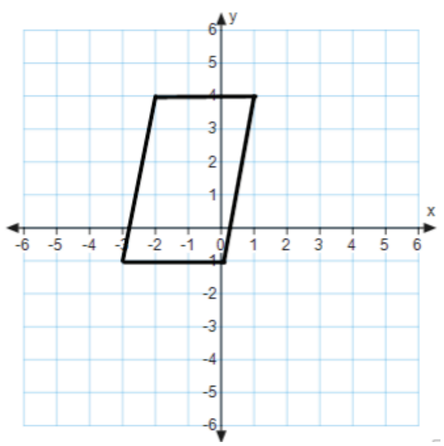
11. El trapecio tiene un área de 115 unidades cuadradas.



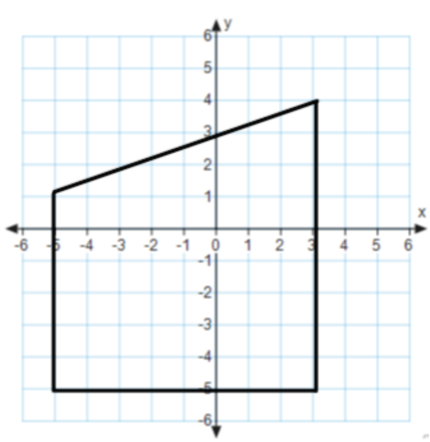
12. Encuentra el área del triángulo ABC.



13. Encuentra el área del cuadrilátero usando dos métodos diferentes. Describe los métodos utilizados y explica por qué dan la misma área.



14. Encuentra el área del cuadrilátero usando dos métodos diferentes. ¿Cuáles son las ventajas o desventajas de cada método?

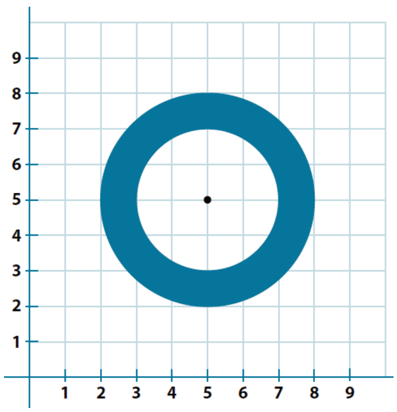


Lección 20: Problemas compuestos de área

Trabajo en clase

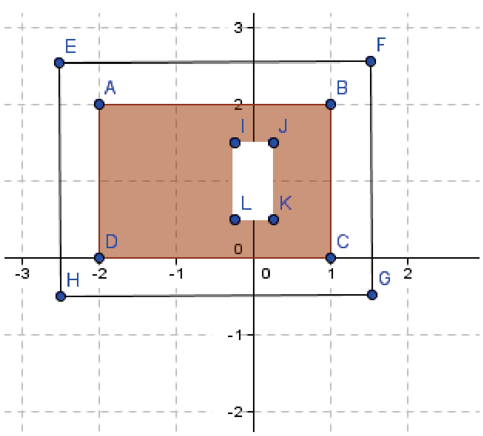
Ejemplo 1

Encuentra el área compuesta de la región sombreada. Usa 3.14 para π.



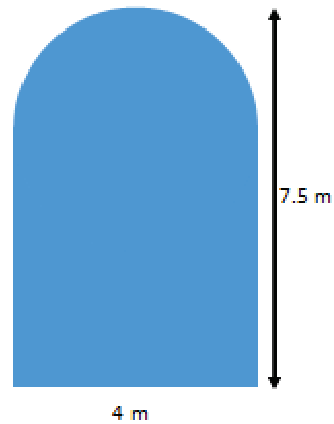
Ejercicio 1

Un patio se muestra con la sección sombreada que indica las áreas con pasto y las secciones no sombreadas indican las áreas pavimentadas. Encuentra el área del espacio cubierto de pasto en unidades^2.



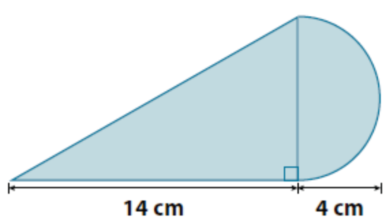
Ejemplo 2

Encuentra el área de la figura que consiste en un rectángulo con un semicírculo en la parte superior. Usa 3.14 para π.



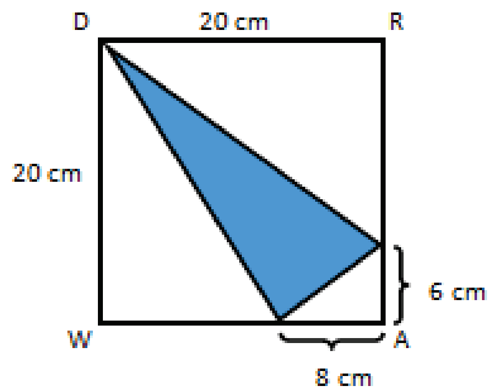
Ejercicio 2

Encuentra el área de la región sombreada. Usa 3.14 para π.



Ejemplo 3

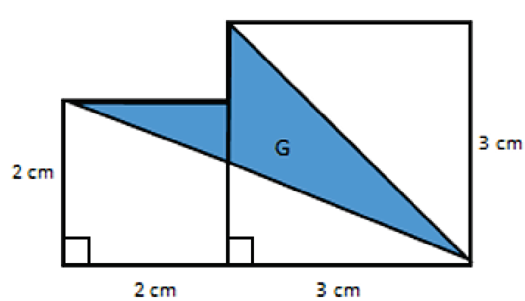
Encuentra el área de la región sombreada.



Vuelve a dibujar la figura que separa los triángulos; después, indica las longitudes discutiendo los cálculos.

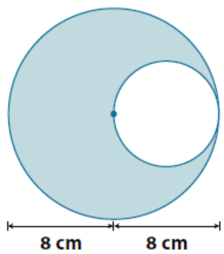
Ejercicio 3

Encuentra el área de la región sombreada. La figura no está dibujada a escala.

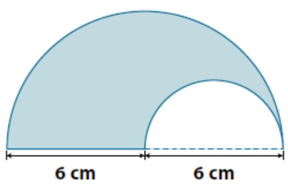


Grupo de problemas

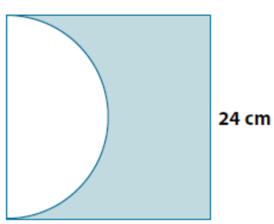
1. Encuentra el área de la región sombreada. Usa 3.14 para π.



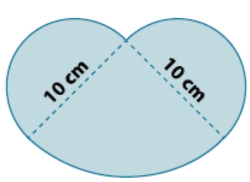
2. La figura muestra dos semicírculos. Encuentra el área de la región sombreada. Usa 3.14 para π.



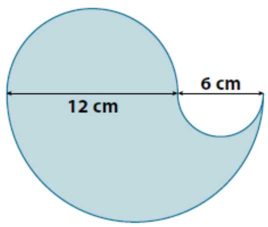
3. La figura muestra un semicírculo y un cuadrado. Encuentra el área de la región sombreada. Usa 3.14 para π.



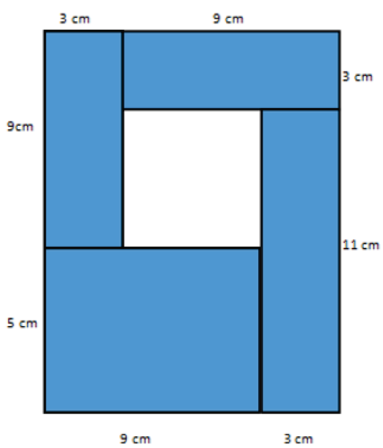
4. La figura muestra dos semicírculos y un cuarto de círculo. Encuentra el área de la región sombreada. Usa 3.14 para π.



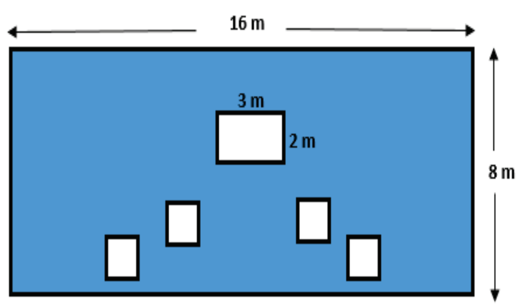
5. Jillian está haciendo una flor de papel como adorno para un proyecto de arte. La flor que está haciendo tiene cuatro pétalos; cada pétalo está formado por tres semicírculos como se muestra a continuación. ¿Cuál es el área de la flor de papel? Proporciona tu respuesta en términos de π.



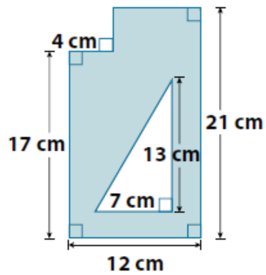
6. La figura está formada por cinco rectángulos. Encuentra el área de la región rectangular sin sombrear.



7. Los cuadrados pequeños en la región sombreada cada uno tienen longitudes laterales de $1.5\ \mathrm{m}$. Encuentra el área de la región sombreada.

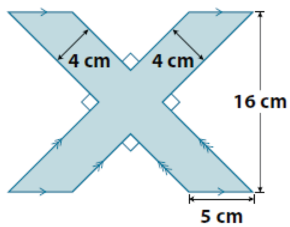


8. Encuentra el área de la región sombreada.



9.

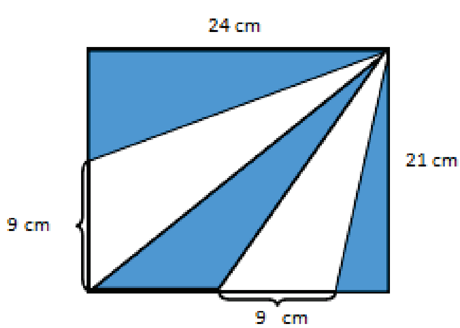
a. Encuentra el área de la región sombreada.



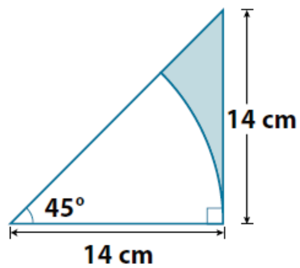
b. Dibuja dos maneras en que la figura anterior se puede dividir en cuatro partes iguales.

c. ¿Cuál es el área de una de las partes en (b)?

10. La figura es un rectángulo hecho de triángulos. Encuentra el área de la región sombreada.



11. La figura se compone de un triángulo rectángulo y un octavo de círculo. Encuentra el área de la región sombreada. Usa $\frac{22}{7}$ para π.

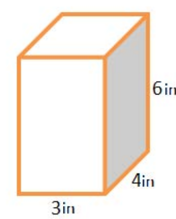


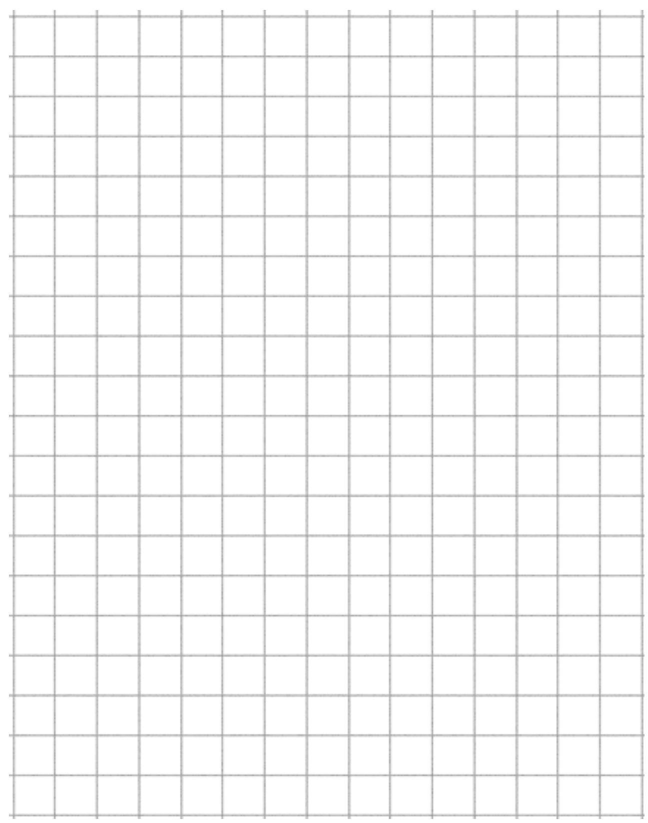
Lección 21: Área de la superficie

Trabajo en clase

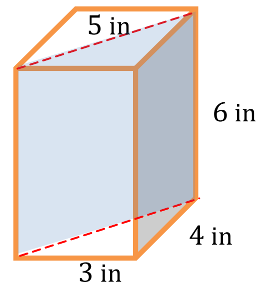
Ejercicio inicial: Área superficial de un prisma rectangular

En la cuadrícula proporcionada, dibuja una red que represente las superficies del prisma rectangular (supón que las líneas de la cuadrícula representan 1 pulgada). Después, encuentra el área superficial del prisma buscando el área de la red.





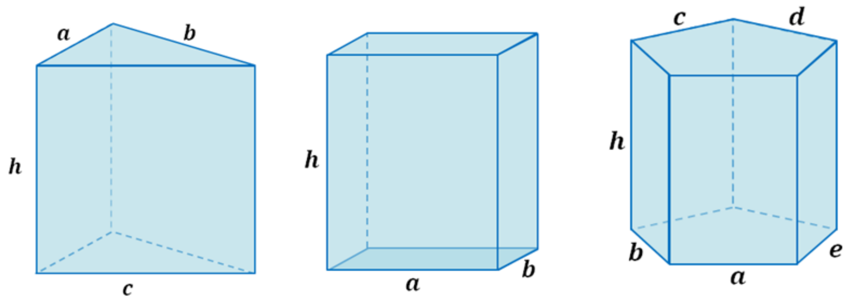
Ejercicio 1



Marco cree que el área superficial del prisma triangular será la mitad que la del prisma rectangular y quiere utilizar la fórmula modificada $SA = \frac{1}{2}(2lw + 2lh + 2wh)$. ¿Estás de acuerdo o en desacuerdo con Marcus? Utiliza las redes de los prismas para apoyar tu argumento.

Ejemplo 1: Área lateral de un prisma recto

Un prisma triangular, un prisma rectangular y un prisma pentagonal se muestran a continuación, y todos tienen la misma altura de h.



a. Escribe una expresión que represente el área lateral del prisma triangular como la suma de las áreas de sus caras laterales.

b. Escribe una expresión que represente el área lateral del prisma rectangular como la suma de las áreas de sus caras laterales.

c. Escribe una expresión que represente el área lateral del prisma pentagonal como la suma de las áreas de sus caras laterales.

d. ¿Qué valor aparece a menudo en cada expresión y por qué?

e. Reescribe cada expresión en forma factorizada utilizando la propiedad distributiva y la altura de cada cara lateral.

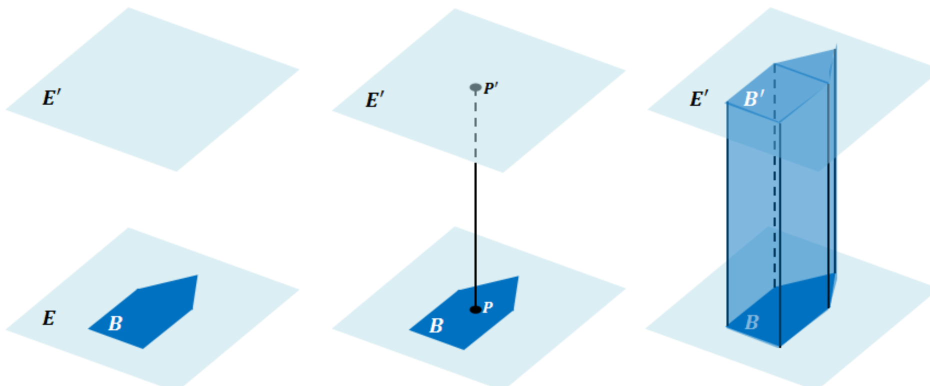
f. ¿Qué representan los paréntesis en cada caso con respecto a los prismas rectos?

g. ¿Cómo podemos generalizar el área lateral de un prisma recto en una fórmula que se aplica a todos los prismas rectos?

Vocabulario relevante

PRISMA RECTO: Sean E y E' dos planos paralelos. Sea B una región triangular o rectangular, o una región que es la unión de dichas regiones en el plano E. En cada punto P de B, se considera el segmento PP'perpendicular a E, que une a P al punto P' del plano E'. La unión de todos estos segmentos es un sólido llamado *prisma recto.*

Hay una región B' en E' que es una copia exacta de la región B. Las regiones B y B' se llaman *caras de la base* (o solo *bases*) del prisma. Las regiones rectangulares entre dos lados correspondientes de las bases se denominan *caras laterales* del prisma. En total, el límite de un prisma rectangular tiene 6 caras: 2 caras de base y 4 caras laterales. Todas las caras adyacentes se cruzan a lo largo de los segmentos llamados aristas (aristas de la base y aristas laterales).



CUBO: Un *cubo* es un prisma rectangular cuyas aristas son todas de la misma longitud.

SUPERFICIE: La *superficie de un prisma* es la unión de todas sus caras (las caras de la base y las caras laterales).

RED: Una *red* es un diagrama de dos dimensiones de la superficie de un prisma.

1. ¿Por qué las caras laterales de los prismas rectos siempre son regiones rectangulares?

2. ¿Cuál es el nombre del prisma recto cuyas bases son rectángulos?

3. ¿De qué manera esta definición de prisma recto incluye el interior del prisma?

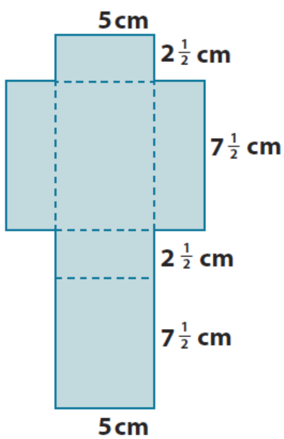
Resumen de la lección

El área superficial de un prisma recto se puede obtener sumando las áreas de las caras laterales al área de las bases. La fórmula para el área superficial de un prisma recto es $SA = LA + 2B$, donde SA representa el área superficial del prisma, LA representa el área de las caras laterales y B representa el área de una base. El área lateral LA se puede obtener multiplicando el perímetro de la base del prisma por la altura del prisma.

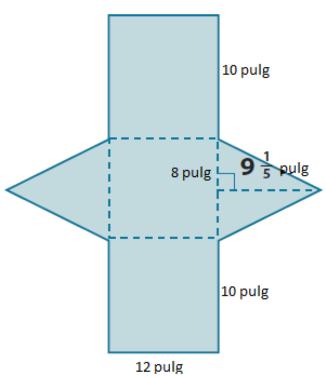
Grupo de problemas

1. Para cada una de las siguientes redes, resalta el perímetro del área lateral, dibuja el sólido representado por la red, indica qué tipo de sólido es y después encuentra el área superficial del sólido.

   a.



   b.



2. Dado un cubo con aristas que son de $\frac{3}{4}$ de pulgada de largo:

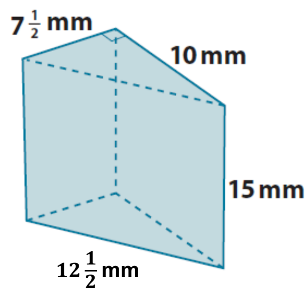
   a. Encuentra el área superficial del cubo.

   b. Joshua hace un dibujo a escala del cubo usando un factor de escala 4. Encuentra el área superficial del cubo que Joshua dibujó.

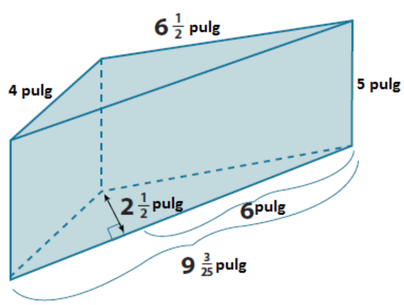
   c. ¿Cuál es la relación del área superficial de la escala del dibujo con la superficie del cubo real y cómo se compara el valor de la relación con el factor de escala?

3. Encuentra el área superficial de cada uno de los siguientes prismas rectos utilizando la fórmula $SA = LA + 2B$.

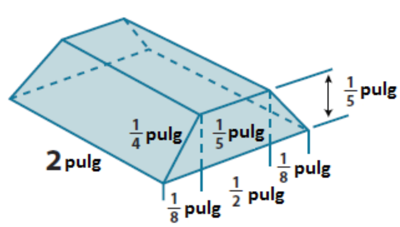
   a.



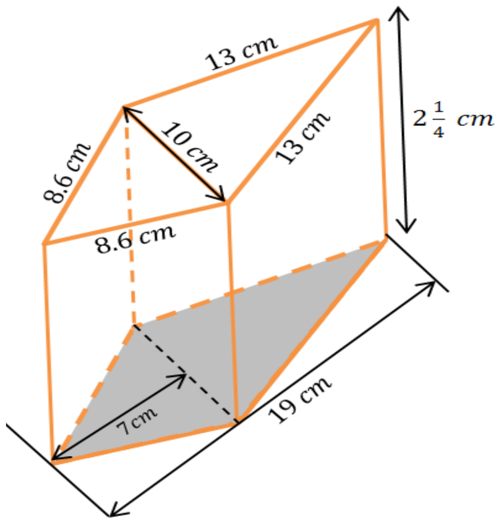
   b.



   c.



d.



4. Un cubo tiene un volumen de $64\ \mathrm{m}^3$. ¿Cuál es el área superficial del cubo?

5. La altura de un prisma rectangular es $4\frac{1}{2}$ pies. La longitud y el ancho de la base del prisma son 2 pies y $1\frac{1}{2}$ pies. Usa la fórmula $SA = LA + 2B$ para encontrar el área superficial del prisma rectangular.

6. El área superficial de un prisma rectangular es $68\frac{2}{3}\ \mathrm{in}^2$. Las dimensiones de su base son 3 in y 7 in. Utiliza la fórmula $SA = LA + 2B$ y $LA = Ph$ para encontrar la altura desconocida h del prisma.

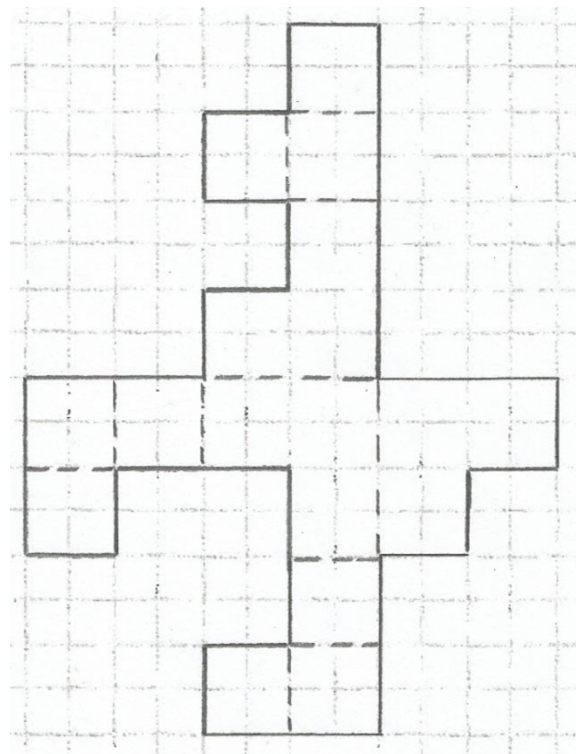
7. Un prisma triangular dado tiene una base triangular equilátera. La altura de ese triángulo equilátero es aproximadamente 7.1 cm. La distancia entre las bases es 9 cm. El área superficial del prisma es $319\frac{1}{2}\ \mathrm{cm}^2$. Encuentra las longitudes aproximadas de los lados de la base.

Lección 22: Área de la superficie

Trabajo en clase

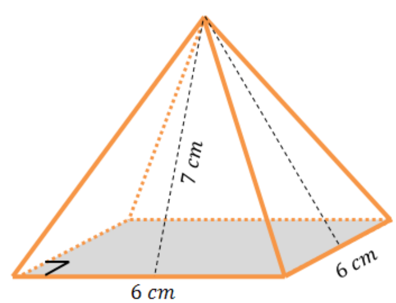
Ejercicio inicial

¿Cuál es el área de la figura compuesta en el diagrama? ¿El diagrama de una red es una imagen en tres dimensiones? Si es así, dibuja la imagen. Si no es así, explica por qué.



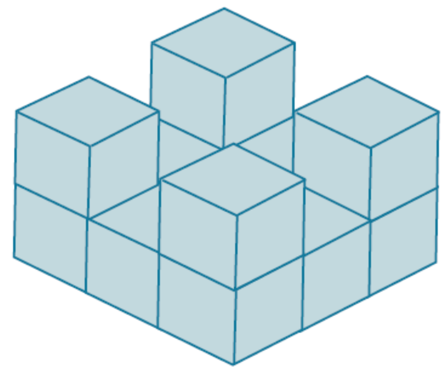
Ejemplo 1

La pirámide de la imagen tiene una base cuadrada y sus caras laterales son triángulos que son copias exactas de los otros. Encuentra el área superficial de la pirámide.



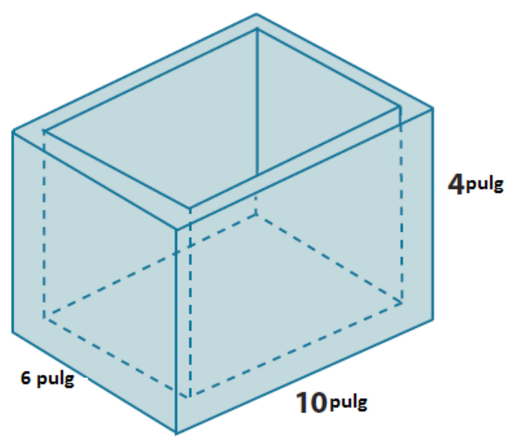
Ejemplo 2: Usar cubos

Hay 13 cubos pegados entre sí formando el sólido en el diagrama. Las aristas de cada cubo tienen $\frac{1}{4}$ pulgada de longitud. Encuentra el área superficial del sólido.



Ejemplo 3

Encuentra el área superficial total de la caja de joyas. Los lados y la parte inferior de la caja tienen todos $\frac{1}{4}$ de pulgada de espesor. ¿Cuáles son las caras que componen esta caja?



¿Cómo se compara esta caja con otros objetos de los que encontraste el área superficial?

Prisma grande

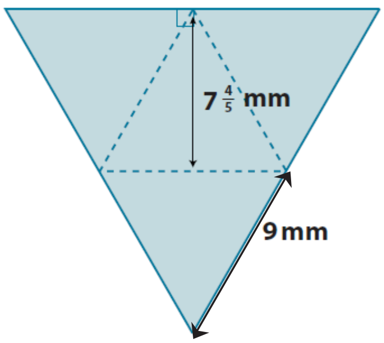
Prisma pequeño

Área superficial de la caja

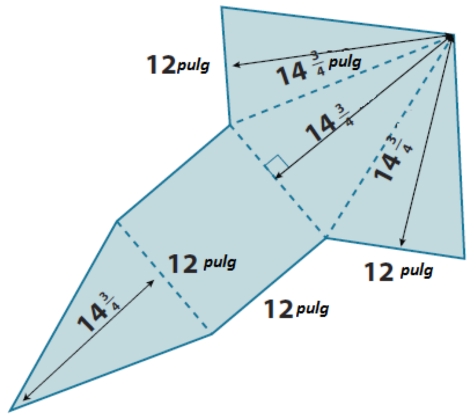
Grupo de problemas

1. Para cada una de las siguientes redes, dibuja (o describe) el sólido representado por la red y encuentra su área superficial.

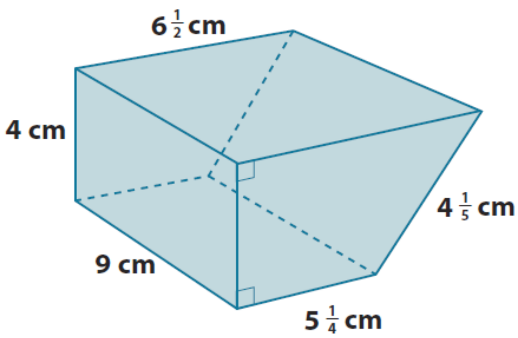
   a. Los triángulos equiláteros son copias exactas.



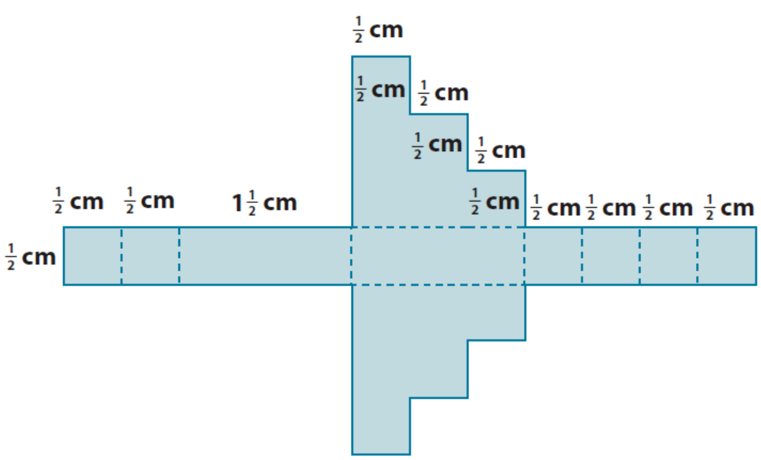
   b.



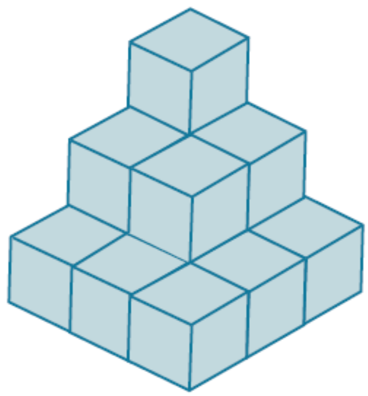
2. Encuentra el área superficial del siguiente prisma.



3. La red a continuación es para un objeto específico. Las medidas se dan en metros. Dibuja (o describe) el objeto y después encuentra su área superficial.

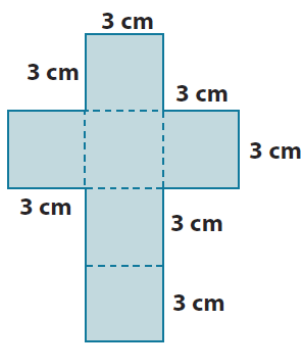


4. En el diagrama, hay 14 cubos pegados para formar un sólido. Cada cubo tiene un volumen de $\frac{1}{8}\,\text{in}^3$. Encuentra el área superficial del sólido.

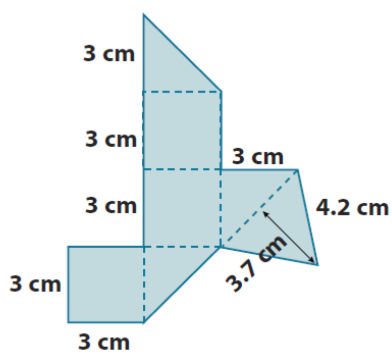


5. Las redes de abajo representan tres sólidos. Dibuja (o describe) cada sólido y después encuentra su área superficial.

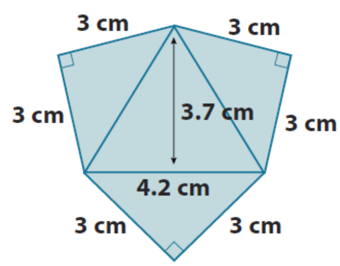
a.



b.

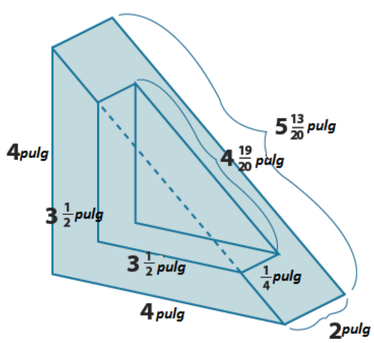


c.

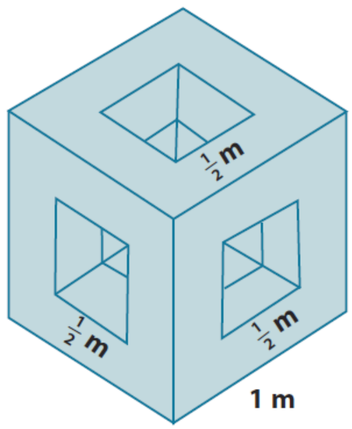


d. ¿Cómo se relacionan las figuras (b) y (c) con la figura (a)?

6. Encuentra el área superficial del sólido que se muestra en el diagrama. El sólido es un prisma triangular (con bases triangulares) con un prisma rectangular menor que se removió.



7. El diagrama muestra un metro cúbico que tiene tres agujeros cuadrados a través del cubo en tres ejes perpendiculares. Encuentra el área superficial del sólido restante.



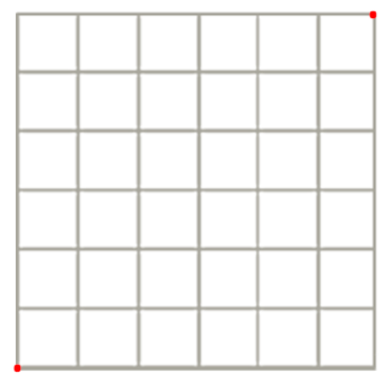
Lección 23: El volumen de un prisma recto

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

El volumen de un sólido es una cantidad determinada por el número de unidades cúbicas necesarias para llenar el sólido. La mayoría de los sólidos (piedras, pelotas de béisbol, personas) no pueden ser llenados con unidades cúbicas o ser ensamblados a partir de cubos. Sin embargo, dichos sólidos todavía tienen volumen. Afortunadamente, no es necesario ensamblar sólidos de unidades cúbicas con el fin de calcular su volumen. Uno de los primeros ejemplos interesantes de un sólido que no se pueden ensamblar a partir de cubos, pero cuyo volumen todavía puede ser calculado a partir de una fórmula, es un prisma triangular.

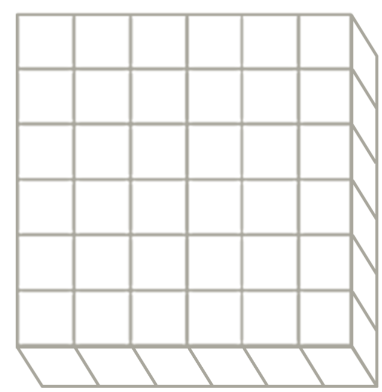
¿Cuál es el área del cuadrado de la imagen a la derecha? Explica.



Dibuja una diagonal que se una con dos puntos dados; después oscurece las líneas de la cuadrícula dentro de la región triangular inferior. ¿Cuál es el área de esa región triangular? Explica.

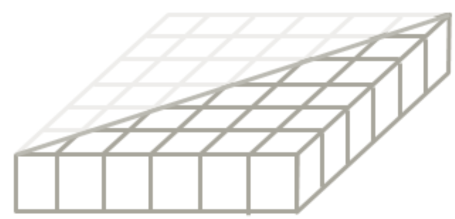
Desafío exploratorio: El volumen de un prisma recto

¿Cuál es el volumen del prisma recto de la imagen a la derecha? Explica.

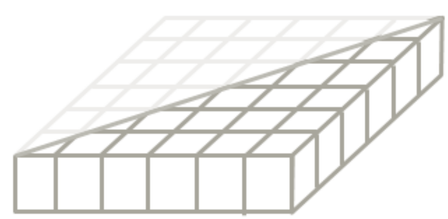


Dibuja la misma diagonal sobre la base cuadrada como se hizo anteriormente; después oscurece las líneas de la cuadrícula en el prisma triangular inferior derecho. ¿Cuál es el volumen de ese prisma triangular? Explica.

¿Cómo podríamos crear un prisma triangular con cinco veces el volumen del prisma rectangular que se muestra a la derecha, sin cambiar la base? Dibuja tu solución en el diagrama, da el volumen del sólido y explica por qué tu solución tiene cinco veces el volumen del prisma triangular.



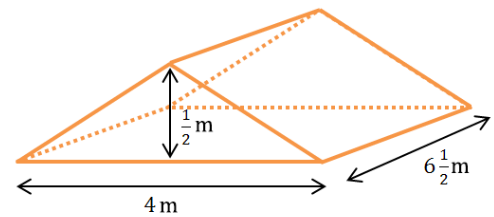
¿Qué podríamos hacer para reducir el volumen del prisma triangular, en la imagen de la derecha, a la mitad sin cambiar la base? Dibuja tu solución en el diagrama, da el volumen del sólido y explica por qué tu solución tiene la mitad del volumen del prisma triangular dado.



Para encontrar el volumen (V) de cualquier prisma recto...

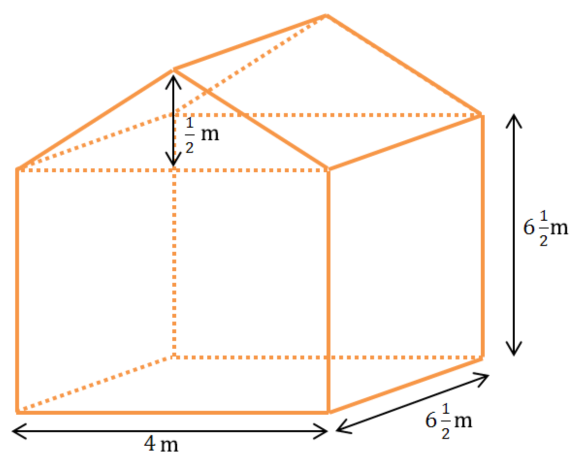
Ejemplo: El volumen de un prisma triangular

Encuentra el volumen del prisma triangular que se muestra en el diagrama utilizando $V = Bh$.



Ejercicio: Representaciones múltiples de volumen

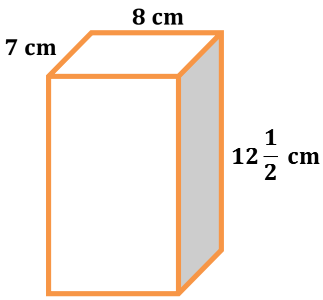
El prisma pentagonal se compone de un prisma rectangular que se unió con un prisma triangular. Encuentra el volumen del prisma pentagonal que se muestra en el diagrama utilizando dos estrategias diferentes.



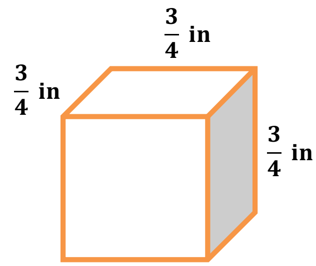
Grupo de problemas

1. Calcula el volumen de cada sólido utilizando la fórmula $V = Bh$ (todos los ángulos son 90 grados).

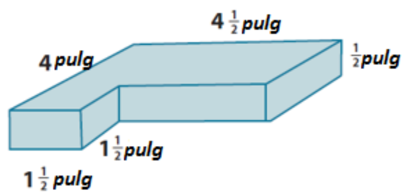
a.



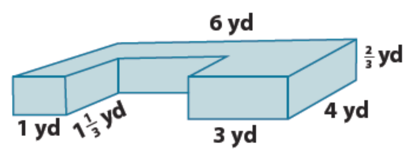
b.



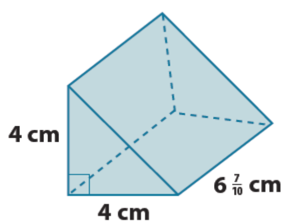
c.



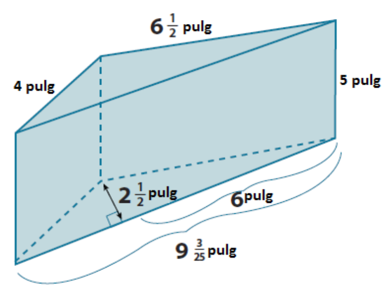
d.



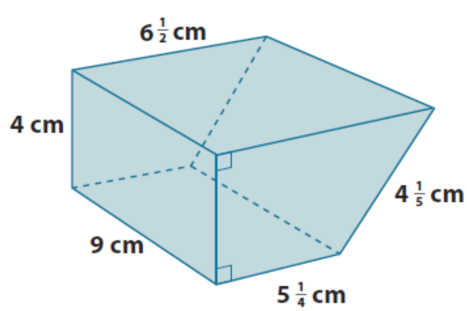
e.



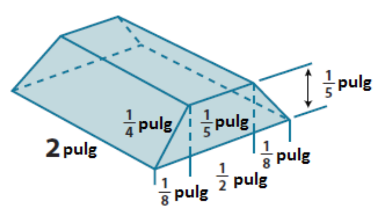
f.



g.



h.



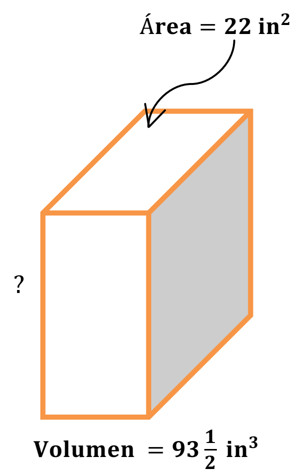
2. Sea l la longitud, w el ancho y h la altura de un prisma rectangular. Encuentra el volumen del prisma cuando

   a. $l = 3 \text{ cm}, w = 2\frac{1}{2} \text{ cm}$ y $h = 7 \text{ cm}.$

   b. $l = \frac{1}{4} \text{ cm}, w = 4 \text{ cm}$ y $h = 1\frac{1}{2} \text{ cm}.$

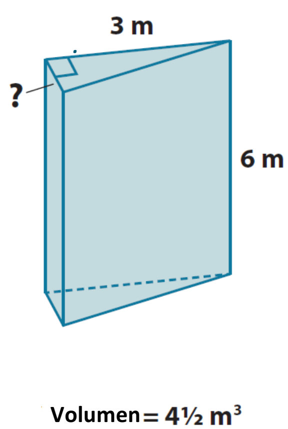
3. Encuentra la longitud de la arista indicada en cada diagrama.

   a.



¿Cuáles son las posibles dimensiones de la base?

   b.



4. El volumen de un cubo es $3\frac{3}{8} \text{ in}^3$. Encuentra la longitud de cada arista del cubo.

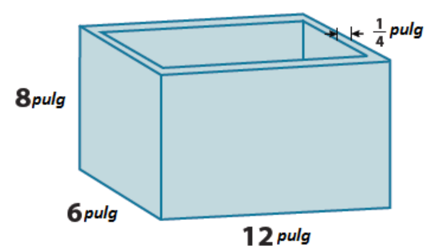
5. Dado un prisma rectangular con un volumen de $7\frac{1}{2} \text{ ft}^3$, una longitud de 5 pies y un ancho de 2 pies, encuentra la altura del prisma.

Lección 24: El volumen de un prisma recto

Trabajo en clase

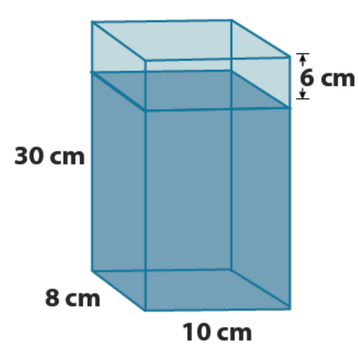
Desafío de exploración: Medir la capacidad de un contenedor

U na caja en la forma de un prisma rectangular tiene una longitud de 12 in, un ancho de 6 in y una altura de 8 in. La base y las paredes del recipiente son $\frac{1}{4}$ in de grueso y su parte superior está abierta. ¿Cuál es la capacidad del prisma rectangular?
(Pista: La capacidad es igual al volumen de agua que se necesita para llenar el prisma hasta la parte superior).



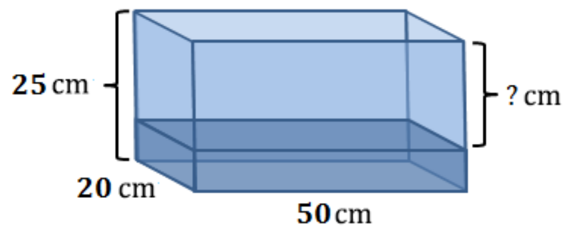
Ejemplo 1: Medir el líquido en un recipiente en tres dimensiones

Un recipiente de vidrio tiene la forma de un prisma rectangular. El contenedor mide 10 cm de largo, 8 cm de ancho y 30 cm de alto. La parte superior del contenedor está abierta y la base y las paredes del recipiente tienen 3 mm (o 0.3 cm) de espesor. El agua en el recipiente está a 6 cm de la parte superior del recipiente. ¿Cuál es el volumen del agua en el recipiente?



Ejemplo 2

$7.2\ \mathrm{L}$ de agua se vierten en un recipiente en la forma de un prisma rectangular. El interior del recipiente mide $50\ \mathrm{cm}$ de largo, $20\ \mathrm{cm}$ de ancho y $25\ \mathrm{cm}$ de alto. ¿A qué distancia de la parte superior del recipiente está la superficie del agua? $(1\ \mathrm{L} = 1000\ \mathrm{cm}^3)$



Ejemplo 3

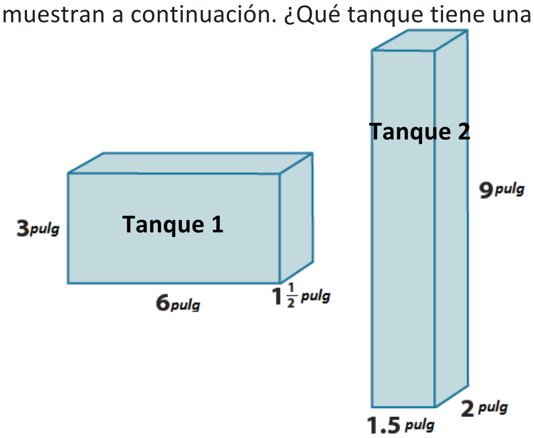
Un depósito de combustible tiene la forma de un prisma rectangular y tiene $27\ \mathrm{L}$ de combustible. Se determina que el depósito está $\frac{3}{4}$ de lleno. Las dimensiones interiores de la base del tanque son $90\ \mathrm{cm}$ por $50\ \mathrm{cm}$. ¿Cuál es la altura del combustible en el tanque? ¿Qué tan profundo es el tanque? $(1\ \mathrm{L} = 1{,}000\ \mathrm{cm}^3)$

Grupo de problemas

1. Marco quiere poner algunos peces y rocas decorativas en su nueva pecera de vidrio. Midió las dimensiones exteriores del prisma rectangular y escribió una longitud de 55 cm, ancho de 42 cm y altura de 38 cm. Calcula que el tanque puede contener 87.78 L de agua. ¿Por qué el cálculo del volumen de Marco es incorrecto? ¿Cuál es el volumen correcto? Marco además no tuvo en cuenta los peces y las rocas decorativas que planea añadir. ¿Cómo afectará esto el volumen del agua en el tanque? Explica.

2. Leondra compró un acuario que es un prisma rectangular. Las dimensiones interiores del acuario son 90 cm de largo, 48 cm de ancho, por 60 cm de profundidad. Planea poner el agua en el acuario antes de comprar cualquier pez. ¿Cuántos litros de agua necesita poner en el acuario para que el nivel del agua esté 5 cm por debajo de la parte superior?

3. El espacio en el interior de dos tanques de agua diferentes se muestran a continuación. ¿Qué tanque tiene una mayor capacidad? Justifica tu respuesta.



4. El interior de un tanque es de la forma de un prisma rectangular. La base de ese prisma es 85 cm por 64 cm. ¿Cuál es la altura mínima en el interior del tanque, si el volumen del líquido en el tanque es 92 L?

5. Un depósito de aceite es de la forma de un prisma rectangular. El interior del tanque es 36.5 cm de largo, 52 cm de ancho y 29 cm de alto. Si 45 litros de aceite se han quitado del tanque ya que estaba lleno, ¿cuál es la profundidad actual de aceite que queda en el tanque?

6. El interior de un tanque con forma de prisma rectangular tiene una base que es de 14 cm por 24 cm y una altura de 60 cm. El tanque se llena hasta su capacidad con agua y entonces 10.92 L de agua se elimina. ¿Hasta qué punto caerá el nivel del agua?

7. Un recipiente con forma de prisma rectangular tiene unas dimensiones interiores de largo $7\frac{1}{2}\ \mathrm{cm}$ y de ancho $4\frac{3}{5}\ \mathrm{cm}$. El depósito está $\frac{3}{5}$ lleno de aceite vegetal. Contiene $0.414\ \mathrm{L}$ de aceite. Encuentra la altura del contenedor.

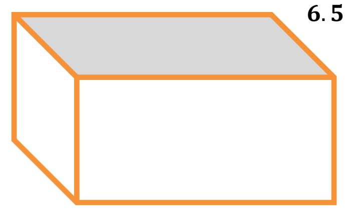
8. Un prisma rectangular con una longitud de $10\ \mathrm{in}$, ancho de $16\ \mathrm{in}$ y altura de $12\ \mathrm{in}$ está $\frac{2}{3}$ lleno de agua. Si el agua se vacía en otro prisma rectangular con una longitud de $12\ \mathrm{in}$, un ancho de $12\ \mathrm{in}$ y una altura de $9\ \mathrm{in}$, ¿el segundo recipiente podrá contener toda el agua? Explica por qué sí o por qué no. Determina el nivel (por encima o por debajo) de agua que tendrá el recipiente hasta la parte superior.

Lección 25: Volumen y área de la superficie

Trabajo en clase

Ejercicio inicial

¿Cuál es el área superficial y el volumen del prisma rectangular?



Ejemplo 1: Volumen de ua pecera

Jay tiene una pecera pequeña. Es la misma forma y tamaño que el prisma rectangular mostrado en el Ejercicio inicial.

a. La caja en la que viene dice que se trata de una pecera de 3 galones. ¿Es cierta esta afirmación? Explica tu razonamiento. Recuerda que $1 \text{ gal} = 231 \text{ in}^3$.

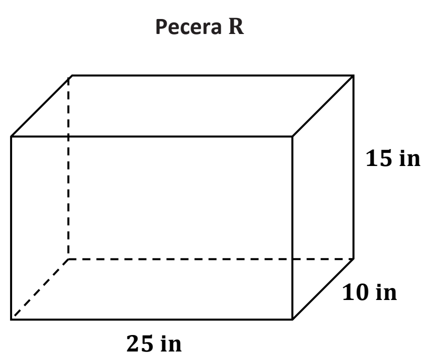
b. La tienda de mascotas recomienda llenar la pecera hasta 1.5 in de la parte superior. ¿Cuántos galones de agua el tanque contendrá si se llena hasta el nivel recomendado?

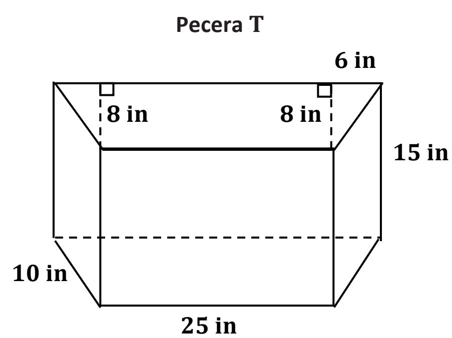
c. Jay quiere cubrir la parte de atrás, izquierda y derecha de la pecera con una imagen de fondo. ¿Cuántas pulgadas cuadradas serán cubiertas por el cuadro?

d. El agua en la pecera se evapora a diario, haciendo que el nivel del agua baje. ¿Cuántos galones de agua se han evaporado en el momento en que el agua en el tanque tiene cuatro pulgadas de profundidad? Supongamos que la pecera se llena a 1.5 in de la parte superior al inicio.

Ejercicio 1: Diseños para peceras

Dos peceras se muestran a continuación, una en la forma de un prisma rectangular (R) y la otra en la forma de un prisma trapezoidal (T).





a. ¿Qué pecera tiene una capacidad mayor de agua? Sea $Vol(R)$ el volumen del prisma rectangular y $Vol(T)$ el volumen del prisma trapezoidal. Utiliza tu respuesta para llenar los espacios en blanco con $Vol(R)$ y $Vol(T)$.

__________________ $<$ __________________

b. ¿Qué pecera tiene más área superficial? Sea $SA(R)$ el área superficial del prisma rectangular y $SA(T)$ el área superficial del prisma trapezoidal. Utiliza tu respuesta para llenar los espacios en blanco con $SA(R)$ y $SA(T)$.

_________________ < _________________

c. El agua se evapora de cada acuario. Después de que el nivel del agua ha bajado $\frac{1}{2}$ pulgadas en cada acuario, ¿cuántas pulgadas cúbicas de agua son necesarias para llenar cada acuario? Demuestra el trabajo para apoyar tus respuestas.

Ejercicio 2: Diseña tu propia pecera

Diseña al menos tres peceras que tengan una capacidad aproximada de 10 galones de agua. Todos los tanques deben hacerse como prismas rectos. Haz al menos una pecera que ten gauna base que no es un rectángulo. Para cada pecera, haz un dibujo y calcula el volumen en galones a la centésima más próxima.

Desafío: Cada tanque se construirá con vidrio que tiene $\frac{1}{4}$ in de grosor. Selecciona una pecera que diseñaste y determina la diferencia entre el volumen de la pecera total (incluyendo el cristal) y el volumen interior de la pecera. No incluyas una tapa de cristal en tu pecera.

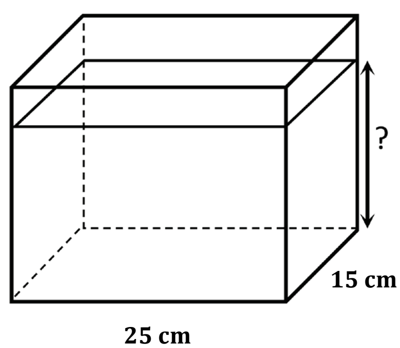
Grupo de problemas

1. Las dimensiones de varias peceras rectangulares se enumeran a continuación. Encuentra el volumen en centímetros cúbicos, la capacidad en litros ($1 \text{ L} = 1{,}000 \text{ cm}^3$) y el área superficial en centímetros cuadrados por cada pecera. ¿Qué observas sobre el cambio de volumen en comparación con el cambio de área superficial entre la pecera pequeña y la pecera extra grande?

Tamaño de pecera	Longitud (cm)	Ancho (cm)	Altura (cm)
Pequeña	24	18	15
Mediana	30	21	20
Grande	36	24	25
Extra grande	40	27	30

Tamaño de pecera	Volumen (cm^3)	Capacidad (L)	Área superficial (cm^2)
Pequeña			
Mediana			
Grande			
Extra grande			

2. Un recipiente rectangular de 15 cm de largo por 25 cm ancho contiene 2.5 L agua.

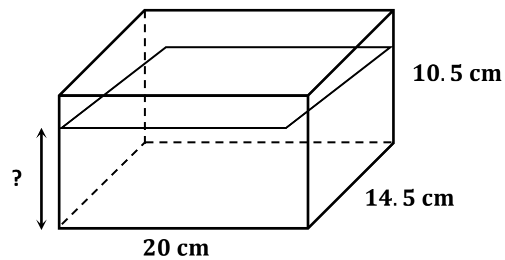


a. Encuentra la altura del nivel de agua en el recipiente. ($1 \text{ L} = 1{,}000 \text{ cm}^3$)

b. Si la altura del contenedor es 18 cm, ¿cuántos litros más de agua se necesitan para llenar completamente el contenedor?

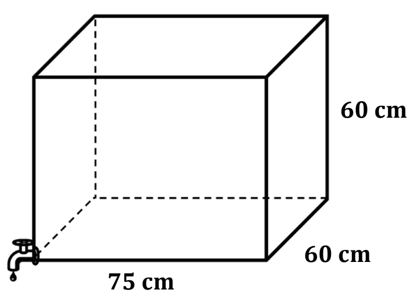
c. ¿Qué porcentaje de la pecera está llena cuando contiene 2.5 L de agua?

3. Un recipiente rectangular que mide 20 cm por 14.5 cm por 10.5 cm se llena de agua hasta el borde. Si se drenan 300 cm^3 del contenedor, ¿cuál será la altura del nivel del agua? Si es necesario, redondea a la décima más cercana.

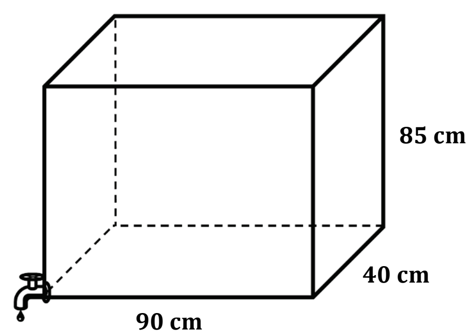


4. Dos tanques se muestran a continuación. Ambos están llenos en su capacidad, pero el propietario decide drenarlos. El tanque 1 se está drenando a una tasa de 8 litros por minuto. El tanque 2 se está drenando a una tasa de 10 litros por minuto. ¿Qué tanque se vacía primero?

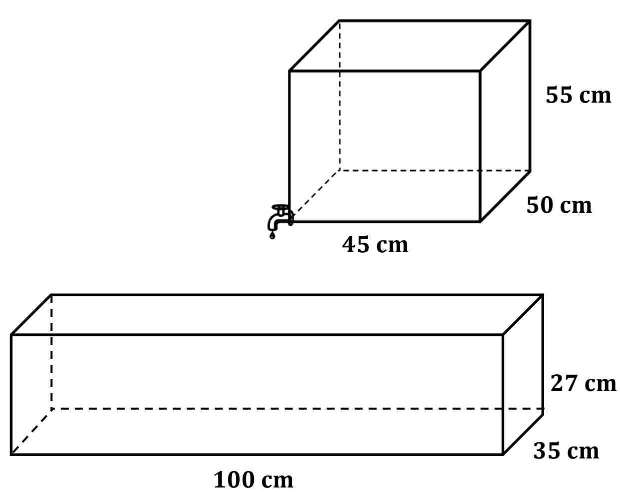
Tanque 1



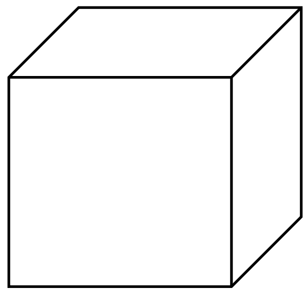
Tanque 2



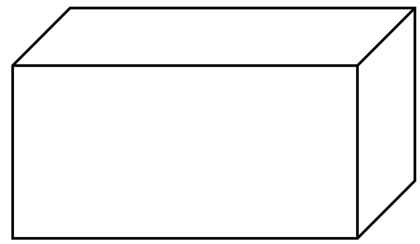
5. Dos tanques se muestran a continuación. Un tanque se está drenando a una tasa de 8 litros por minuto en otro que está vacío. Después de 10 minutos, ¿cuál será la altura del nivel del agua en el segundo tanque? Si es necesario, redondea al minuto más cercano.



6. Dos tanques con volúmenes iguales se muestran a continuación. Las tapas están abiertas. El propietario quiere cubrir un tanque con una tapa de cristal. El costo del vidrio es $\$0.05$ por pulgada cuadrada. ¿Qué tanque sería menos costoso cubrir? ¿Cuánto menos?



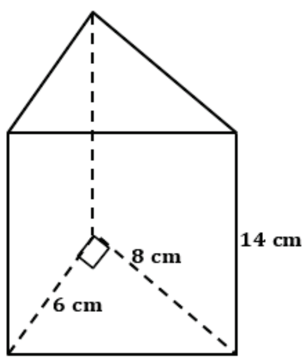
Dimensiones: 12 in de largo por 8 in de ancho por 10 in de alto



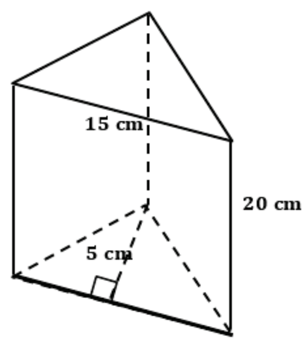
Dimensiones: 15 in de largo por 8 in de ancho por 8 in de alto

7. Cada prisma a continuación es una caja de regalo que se venden en la tienda de artesanías.

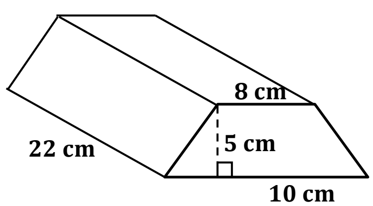
(a)



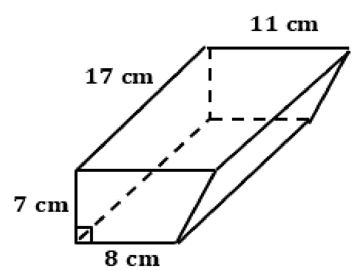
(b)



(c)



(d)



a. ¿Cuál es el volumen de cada prisma?

b. Jenny quiere llenar cada caja con gomitas. Si una onza de gomitas es de aproximadamente 30 cm^3, ¿cuántas onzas de gomitas Jenny necesitará para llenar las cuatro cajas? Justifica tus estimaciones.

8. Dos tanques rectangulares se llenan a una tasa de 0.5 pulgadas cúbicas por minuto. ¿Cuánto tiempo se tarda cada tanque en llenarse hasta la mitad?

a. Dimensiones del Tanque 1: 15 in por 10 in por 12.5 in

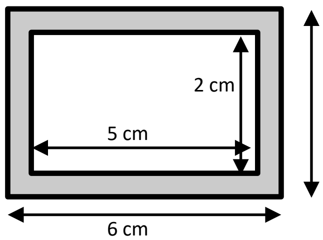
b. Dimensiones del Tanque 2: $2\frac{1}{2} \text{ in}$ por $3\frac{3}{4} \text{ in}$ por $4\frac{3}{8} \text{ in}$

Lección 26: Volumen y área de la superficie

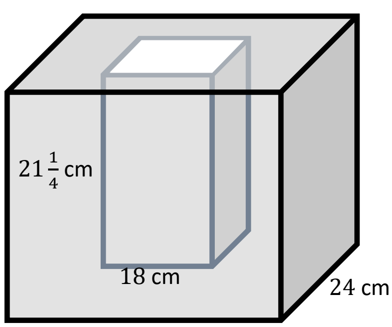
Trabajo en clase

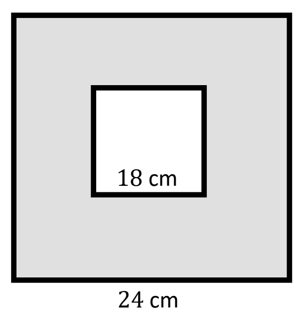
Ejercicio inicial

Explica a tu compañero cómo se calcula el área de la región sombreada. Luego calcula el área.



Ejemplo 1: Volumen de una carcasa





La caja aislada mostrada está hecha de un gran cubo con un hueco en su interior en forma de prisma rectangular con una base cuadrada. La figura de la derecha representa como se ve el cuadro de arriba.

a. Calcula el volumen de la caja exterior.

b. Calcula el volumen del prisma interior.

c. Describe con palabras cómo encontrarías el volumen del aislamiento.

d. Calcula el volumen del aislamiento en centímetros cúbicos.

e. Calcula la cantidad de agua que la caja puede contener en litros.

Ejercicio 1: Diseño de una jardinera

La escuela te ha pedido diseñar una jardinera de ladrillos que será utilizada por las clases para plantar flores. La jardinera será construida en forma de un prisma rectangular sin fondo para que el agua y las raíces puedan tener acceso a la tierra debajo. Las dimensiones exteriores son $12\text{ ft} \times 9\text{ ft} \times 2\frac{1}{2}\text{ ft}$. Los ladrillos utilizados para construir la jardinera son 6 in de largo, $3\frac{1}{2}\text{ in}$ de ancho y 2 in de alto.

a. ¿Cuáles son las dimensiones interiores de la jardinera si el espesor de las paredes son de igual longitud que los ladrillos?

b. ¿Cuál es el volumen de los ladrillos de la jardinera?

c. Si van a llenar la jardinera con $\frac{3}{4}$ de tierra, ¿cuánta tierra se necesita comprar y cuál sería la altura del suelo?

d. ¿Cuántos ladrillos se necesitan para construir la jardinera?

e. Cada ladrillo utilizado en este proyecto cuesta $\$0.82$ y pesa 4.5 lb. La empresa proveedora cobra una tarifa de entrega de $\$15$ por tonelada ($2{,}000\text{ lb}$) por más de $4{,}000\text{ lb}$. ¿Cuánto pagará la escuela por los ladrillos (incluyendo la entrega) para construir la jardinera?

f. Un pie cúbico de tierra pesa entre 75 y 100 lb. ¿Cuánto pesará la tierra para la jardinera?

g. Si la tierra cuesta $\$0.88$ por pie cúbico, calcula el costo total de los materiales que serán usados para la construcción de la jardinera.

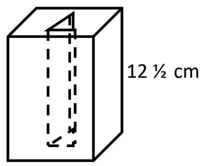
Ejercicio 2: Diseño de un comedero

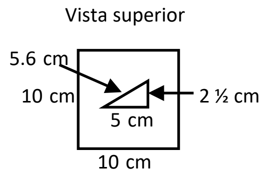
Hiciste tan buen trabajo con el diseño de la jardinera que un granjero local te ha pedido diseñar un comedero para los animales de su granja. Su comedero debe ser capaz de contener al menos $100{,}000$ centímetros cúbicos, pero no más de $200{,}000$ centímetros cúbicos de granos cuando está lleno. El comedero debe ser construido de acero inoxidable y debe tener la forma de un prisma recto, pero no de un prisma rectangular. Dibuja tu diseño abajo, incluyendo dimensiones. Calcula el volumen de granos que puede contener y la cantidad de metal necesario para construir el comedero.

El agricultor necesita una estimación de costos. Calcula el costo de construcción del comedero si el acero inoxidable de $\frac{1}{2}$ cm de grueso se vende a $\$93.25$ por metro cuadrado.

Grupo de problemas

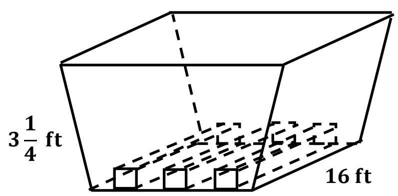
1. Un juguete de un niño se construye cortando un prisma triangular a la derecha de un prisma rectangular.

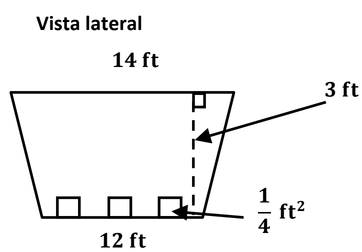




   a. Calcula el volumen del prisma rectangular.
   b. Calcula el volumen del prisma triangular.
   c. Calcula el volumen del material que queda en el prisma rectangular.
   d. ¿Cuál es el mayor número de prismas triangulares que se pueden cortar del prisma rectangular?
   e. ¿Cuál es el área superficial del prisma triangular (supón que no hay parte superior o inferior)?

2. Un diseñador de jardines está construyendo una jardinera para flores en forma de un prisma trapezoidal. Tiene que poner tres prismas cuadrados idénticos a través de la jardinera para el drenaje.





   a. ¿Cuál es el volumen de la jardinera sin los tubos de drenaje?
   b. ¿Cuál es el volumen total de los tres tubos de drenaje?
   c. ¿Cuál es el volumen de la tierra si la jardinera se llena $\frac{3}{4}$ de su capacidad total con los tubos en su lugar?
   d. ¿Cuál es la altura de la tierra? Si es necesario, redondea a la décima más cercana.
   e. Si la jardinera está hecha de piezas de madera contrachapada de $8 \text{ ft} \times 4 \text{ ft}$, ¿cuántas piezas de madera contrachapada necesitará el diseñador de jardines para construir la jardinera sin los tubos de drenaje?
   f. Si la madera necesaria para construir la jardinera cuesta $\$35$ por pieza de $8 \text{ ft} \times 4 \text{ ft}$, los tubos de drenaje cuestan $125 cada uno y la tierra cuesta $1.25/pie cúbico, ¿cuánto es el costo para construir y llenar la jardinera?